Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I
Sommersemester 2011

Analysis I - Übungsblatt 9

(Abgabe: Dienstag 14. Mai 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 15. Juni vor der ersten Übung.)

"A mathematician is a device for turning coffee into theorems."
- Paul Erdös, 1913 - 1996, Hungarian mathematician.

Aufgabe 40 *(Abschätzungen)* (2+2=4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Abschätzungen

(i) $n^n e^{-n+1} \leq n! \leq n^{n+1} e^{-n+1} \quad , \forall\, n \in \mathbb{N}.$

(ii) $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1 \quad , \forall\, x > 0.$

Aufgabe 41 *(Konvergenz von Folgen)* (1+1+1+1+1+1=6 Punkte)

Untersuchen Sie nachstehende Folgen auf Konvergenz

(i) $a_n := \left(\frac{1+n}{2+n}\right)^n$ (ii) $a_n := \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ (iii) $a_n := \frac{1}{n}\log(n + e^n)$

(iv) $a_n := n - 3\left[\frac{n}{3}\right]$ (v) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$ (vi) $a_n := \frac{\log(\log n)}{\log n}$

Hinweise: (ii) Es gilt $\sqrt[n]{n!}e \sim n$*; (iii) Es gilt* $n = o(e^n)$*; (vi) Es gilt* $\frac{\log n}{n} \to 0$ *für* $n \to \infty$*.*

Aufgabe 42 *(Limes superior und Limes inferior)* (2+2+2=6 Punkte)

Bestimmen Sie den Limes superior, den Limes inferior und falls existent, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für

(i) $a_n := (-1)^n n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

(ii) $a_n := \exp\left((-1)^n \left(\frac{n^2+1}{n^2-1}\right)\right)$

(iii) $a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Aufgabe 43 *(Grenzwert und Exponentialfunktion)* (2 Punkte)

Gegeben sei eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{a_n}{n}\right)^n = e^a.$$

Aufgabe 44 *(Hierarchie des Unendlichen)* (2 Punkte)

Alle nachstehenden, aufgelisteten Folgen divergieren bestimmt gegen $+\infty$. Ordnen Sie diese wie folgt an: Eine Folge (a_n) soll links vor einer Folge (b_n) stehen, wenn $a_n = o(b_n)$ gilt, d.h. wenn $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \to 0$ gilt, was bedeutet, dass (a_n) von kleinerer Größenordnung als (b_n) ist. Die Folgen sind

$$e^n;\ \ \log n;\ \ \log(1+e^n);\ \ n!;\ \ n^{\sqrt{n}};\ \ n^2;\ \ e^{\sqrt{n}};\ \ (e^2)^n;\ \ n^n;\ \ e^{\sqrt{\log n}};\ \ e^{(e^n)};\ \ \sqrt[3]{n}.$$