Dr. Gerhard Baur
Dipl.-Math. Lukas Bartholomäus
B.Sc. Pascal Heiter
Adrian Spener

Analysis I - Übungsblatt 12

(Abgabe: Dienstag 05. Juli 2011 vor der Vorlesung oder Mittwoch 06. Juli vor der ersten Übung.)

"The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's, must be *beautiful*; the ideas, like the colors or the words, must fit together in a harmonious way. There is no permanent place in the world for ugly mathematics."
- Godfrey Harold Hardy, 1877 - 1947, English mathematician.

Aufgabe * *(Anmeldung zur Vorleistung und zur Klausur)* (0 Punkte)

Melden Sie sich **bis spätestens 10.07.2011** im Hochschulportal (`http://portal.uni-ulm.de/PortalNG/index.html`) für die Vorleistung an. Das Zulassungskriterium für die Klausur lautet

$$\sum_{k=1}^{12} (\text{Anzahl der erreichten Punkte auf Blatt } k) \geq 120.$$

Bitte melden Sie sich danach vom 11. bis 13. Juli 2011 zur eigentlichen Klausur an.

Aufgabe 54 *(Stetigkeit I)* (4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) := \begin{cases} \frac{e^z-1}{z} & \text{, für z} \neq 0 \\ 1 & \text{, für z} = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des ε-δ-Kriteriums, dass f stetig in $a = 0$ ist.

Aufgabe 55 *(Stetigkeit II)* ((2+2+2)+2 = 8 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Stellen a, an denen folgende Funktionen stetig sind

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \log(x^2 + 1)$

(ii) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x & , x \leq 3 \\ x^2 & , x > 3 \end{cases}$

(iii) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^x$.

Hinweis zu (iii): Es gilt $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log x = 0$ *für* $\alpha > 0$.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir definieren

$$f \text{ erfüllt auf } I \text{ eine } \textit{Lipschitz-Bedingung} :\Leftrightarrow \exists L > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \qquad \forall x, y \in I.$$

Zeigen Sie, dass wenn f auf I eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, so ist f auch stetig auf I.

Aufgabe 56 *(Zwischenwertsatz)* (3+3 = 6 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$e^x = -x$$

in $\mathbb{R}$ genau eine Lösung besitzt.

(b) Sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt in $[0,1]$ besitzt, d.h.

$$\exists\, \xi \in [0,1] : f(\xi) = \xi$$

Aufgabe 57 *(Existenz einer kleinsten Nullstelle)* (2 Punkte)

Sei $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und besitze eine Nullstelle in I. Zeigen Sie, dass f in I eine kleinste Nullstelle besitzt, d.h. $\min T$ existiert für

$$T := \{x \in [a,b] \,:\, f(x) = 0\}.$$