Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Übungsblatt 3

(Abgabe: Donnerstag, 10. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 9 *(Lipschitz-Bedingung)* (2+2+2=6 Punkte)

Untersuche ob die folgenden Funktionen auf dem angegebenen Rechteck R eine Lipschitz-Bedingung erfüllen.

(i) $f(t,x) = \log(1+e^{tx}), \quad R = [0,2) \times (0,1)$

(ii) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}, \quad R = [0,1) \times (x_0 - s, x_0 + s), 0 < s < x_0$

(iii) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}, \quad R = [0,1) \times [0,s), s > 0$

Aufgabe 10 *(Picard-Lindelöf)* (9 Punkte)

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0$$

eine eindeutige Lösung $x(t)$ auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ besitzt und dass dies das größte Lösungsintervall ist, das man aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhalten kann. Berechne anschließend die Picard-Iterationen $x_0(t), x_1(t), x_2(t)$ und $x_3(t)$.

Aufgabe 11 (9 Punkte)

Es sei $M := [0,a] \times \mathbb{R}$ ($a > 0$ fest), $f : M \to \mathbb{R}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Dabei sei f stetig auf M und erfülle darauf eine Lipschitz-Bedingung. Ferner sei die Funktionenfolge $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ für $t \in [0,a]$ definiert durch

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1} := x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_n(\tau)) d\tau \quad n \geq 0.$$

Zeige: $x_n(t)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,a]$ und die Grenzfunktion $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ ist zweimal differenzierbar auf $[0,a]$ mit $\ddot{x}(t) = f(t, x(t))$. Zeige zusätzlich, dass $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = x_1$ gilt.