Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Übungsblatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 31. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 17 *(Fundamentalsysteme)* (5 Punkte)

Finde ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Jordan-Methode.

(Hinweis: Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $S^{-1}AS$ in Jordannormalform.)

Aufgabe 18 *(Fundamentalsysteme)* (9 Punkte)

Für $t > 0$ sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $x_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$ das System $\dot{x} = A(t)x$ löst und ergänze zu einem Fundamentalsystem.

Aufgabe 19 *(Matrixexponentation)* (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ idempotent. Bestimme e^{tA}.

(Hinweis: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt idempotent, falls $A^2 = A$ gilt.)

Aufgabe 20 *(Differenzialgleichungen höherer Ordnung)* (3+3+3+3=12 Punkte)

Bestimme eine allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.

(i) $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

(ii) $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 6\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$

(iii) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$

(iv) $\ddot{x} + x = t + \sin(2t)$