Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Übungsblatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 16. Mai 2012 vor der Vorlesung.)

Aufgabe 12 *(Wiederholung)* (3+3=6 Punkte)

Löse die folgenden Differenzialgleichungen:

(i) $\dot{x} = \frac{t \tan(x)}{1+t^2} \qquad x(0) = \frac{\pi}{4}$

(ii) $x^3 - \frac{1}{\sqrt{t+1}} + e^t + 3x^2 t\dot{x} = 0 \qquad x(0) = 0$

Lösung:
zu (i)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\tan(\tau)} d\tau = \log\left(\frac{\sin(x)}{\sin(\frac{\pi}{4})}\right)$$
$$\int_{t_0}^{t} \frac{\tau}{\tau^2+1} d\tau = \log(\sqrt{1+t^2})$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{\sin(x)}{\sin\frac{\pi}{4}}\right) = \log\left(\sqrt{1+t^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \sin(x) = \sqrt{1+t^2}\sin(\frac{\pi}{4})$$
$$\Leftrightarrow x(t) = \arcsin\left(\sqrt{1+t^2}\sin(\frac{\pi}{4})\right)$$

Für das maximale Lösungsintervall ergibt sich hierdurch, dass $t \in (-1,1)$ ist.
zu (ii) Es gilt:

$$f(t,x) = x^3 - \frac{1}{\sqrt{t+1}} + e^t \qquad \text{und} \qquad g(t,x) = 3x^2 + t$$

$$f(t,x)_x = 3x^2 \qquad \text{und} \qquad g(t,x)_t = 3x^2$$

$\Rightarrow$ Es handelt sich um eine exakte DGL.
$\Rightarrow \Phi(t,x) = x^3 t - 2\sqrt{t+1} + e^t$
Mit Hilfe des Anfangswertes ergibt sich somit:

$$x^3 t - 2\sqrt{t+1} + e^t = \Phi(0,0) = -1$$

$$\Rightarrow x(t) = \sqrt[3]{\frac{-1+2\sqrt{t+1}-e^t}{t}}$$

für $t \in U_\epsilon(0)$.

Aufgabe 13 *(System von Differenzialgleichungen)* (3 Punkte)

Löse das System von Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_1 & x_1(0) &= 1 \\ \dot{x_2} &= x_1 + x_2 & x_2(0) &= 0 \\ \dot{x_3} &= x_1 + x_2 + x_3 & x_3(0) &= 0 \end{aligned}$$

Lösung:

Es gilt:

$$\dot{x_1}(t) = x_1 \Rightarrow x_1(t) = e^t$$

$$\Rightarrow x_2(t) = 0e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} + e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \int_0^t e^{\int_0^s -f(\tau)d\tau} e^s ds = e^t t$$

Also ist $\dot{x}_3(t) = e^t + te^t + x_3$

$$\Rightarrow x_3 = 0e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} + e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \int_0^t e^{\int_0^s -f(\tau)d\tau}(e^s + se^s)ds = e^t \int_0^t (1+s)ds = e^t t + \frac{1}{2}t^2 e^t$$

Dies ist die Lösung des System von Differenzialgleichungen $\forall t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 14 (4+5=9 Punkte)

Seien $A, B : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ differenzierbar auf $I \subset \mathbb{R}$.

(i) Zeige, dass das Matrixprodukt $C = AB$: $I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ auf I differenzierbar ist mit

$$\dot{C}(t) = \dot{A}(t)B(t) + A(t)\dot{B}(t) \quad , \quad t \in I.$$

(ii) Zeige im Fall $\det A(t) \neq 0$, $t \in I$, dass die inverse Matrix A^{-1}: $I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ ebenfalls auf I differenzierbar ist mit

$$\frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t), \quad t \in I.$$

Lösung:

1. klar: $\frac{d}{dt}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)b_{jk}(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dot{a}_{ij}(t)b_{jk}(t) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\dot{b}_{jk}(t)$.

2. Nach Voraussetzung ex. A^{-1} auf ganz I mit $A^{-1}(t) = \frac{\overline{A(t)}}{\det A(t)} \Rightarrow A^{-1}(t)$ ist diff'bar.

$$0 = \frac{d}{dt}\left(A^{-1}(t)A(t)\right) = \dot{A}^{-1}(t)A(t) + A^{-1}(t)\dot{A}(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}A^{-1}(t) = -A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t) \qquad \forall t \in I$$