Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Übungsblatt 2

(Abgabe: Donnerstag, 3. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 5 *(DGL mit AWP)* (4 Punkte)

Löse das folgende Anfangswertproblem. Gib ein möglichst großes Lösungsintervall an.

$$\dot{x} = tx^2 - \frac{x}{t} - \frac{2}{t^3} \qquad , \qquad x(2) = 1.$$

Hinweis: $x_0(t) = \frac{c}{t^2}$ mit geeignetem $c \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung.

Lösung:
$x_0(t)$ löst die Riccatsche DGL für $t > 0$ genau dann wenn

$$-2c = c^2 - c - 2 \Leftrightarrow 0 = c^2 + c - 2 = (c-1)(c+2)$$

erfüllt ist. $(c_1 = 1, c_2 = -2) \Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{y(t)} + x_0(t)$
Somit gilt:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -t - (2t\frac{c}{t^2} - \frac{1}{t})y \\ &= -t + (-2c+1)\frac{y}{t} \\ &= \frac{(-2c+1)}{t}y - t\end{aligned}$$

Lösung für y:

$$\begin{aligned}y(t) &= de^{(-2c+1)}\log(t) + e^{(-2c+1)}\log(t) \int e^{-(-2c+1)}\log(t)(-s)ds \\ &= dt^{-2c+1} + t^{-2c+1} \int -s^{2c} ds \\ &= dt^{1-2c} - \frac{t^2}{2c+1}\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1(t) = \frac{1}{dt^{1-2c} - \frac{t^2}{2c+1}} + \frac{c}{t^2} \quad t \in I \subset (0, \infty)$
Es gilt für $c = c_1$:

$x_1(t) = \frac{3}{3dt^{-1} - t^2} + \frac{1}{t^2}$. Mit dem AWP ergibt sich $d = \frac{16}{3}$
Es gilt für $c = c_2$:

$x_1(t) = \frac{-3}{-3dt^5 - t^2} - \frac{2}{t^2}$. Mit dem AWP ergibt sich $d = -\frac{1}{48}$
Für beide Parameter entsteht die Lösung

$$x(t) = -\frac{(2t^3+16)}{t^2(t^3-16)} \qquad t \in (0, 2\sqrt[3]{2})$$

Aufgabe 6 *(Differenzialgleichung mit AWP)* (3+3=6 Punkte)

Löse die folgenden Anfangswertprobleme. Gib ein möglichst großes Lösungsintervall an.

(i) $t(t+1)\dot{x} = \sqrt[3]{x^2} \quad , \quad x(1) = 0$

(ii) $t\dot{x} = x \log \frac{x}{t} \quad , \quad x(-1) = -1$

Lösung:
zu (i) (Getrennte Veränderliche)
$\dot{x} = \frac{1}{t(t+1)} \sqrt[3]{x^2}$
$\Rightarrow x(t) \equiv 0$ ist Lösung für $t \in \mathbb{R}$. Im Folgenden sei $I = (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow G(x) &= \int \frac{1}{g(x)} dx = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = 3\sqrt[3]{x} \\
F(t) &= \int \frac{1}{t(t+1)} dt = \log(t) - log(t+1) \\
\Rightarrow G(x(t)) &= F(t) + c \\
\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{x} &= \log(t) - \log(t+1) + c
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des AWP ergibt sich $c = \log(2)$.
Also gilt für die Lösung:

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + c) = \left(\frac{1}{3} \log\left(\frac{2t}{t+1}\right)\right)^3 \quad t \in (0, \infty)$$

zu (ii) (Homogene Differenzialgleichung)

$\dot{x} = \frac{x}{t} \log\left(\frac{x}{t}\right)$
Es gilt, dass $x(t) = et$, $t \in \mathbb{R}$ ist eine Lösung der DGL. Allerdings nicht des AWP's.
Sei nun aufgrund des AWP $I = (-\infty, 0)$. Sei $y(t) := \frac{x(t)}{t}$. Dann gilt

$$\dot{y} = \frac{y}{t}(\log(y) - 1) \quad \text{mit } y(-1) = 1.$$

Lösung über getrennte Veränderliche

$$\begin{aligned}
\int_1^{y(t)} \frac{1}{s(\log(s) - 1)} &= \log|\log(s) - 1|\big|_{s=1}^{y(t)} = \log|\log(y) - 1| \\
&= \int_{-1}^{t} \frac{1}{s} ds = \log|t|
\end{aligned}$$

Also gilt für $I = (-\infty, 0)$, dass $|\log(y) - 1| = -t$ und somit

$$y(t) = e^{t+1}$$

Also ist

$$x(t) = te^{t+1} \quad \text{für} \quad t \in I.$$

Aufgabe 7 *(verallgemeinrte homogene Differenzialgleichung)* (4+4=8 Punkte)

Für $f \in C(J)$, $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und Zahlen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $a\beta - \alpha b \neq 0$ heißt

$$\dot{x} = f\left(\frac{at + bx + c}{\alpha t + \beta x + \gamma}\right) \quad (1)$$

mit $\alpha t + \beta x + \gamma \neq 0$, $(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}) \in J$ eine verallgemeinerte homogene DGL.

(i) Zeige: Es gibt ein $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ mit $at_0 + bx_0 + c = \alpha t_0 + \beta x_0 + \gamma = 0$ und (x, I) welches genau dann eine Lösung von (1) ist, wenn (z, I) Lösung der homogenen DGL $\dot{z} = f(\frac{a+b\frac{z}{t}}{\alpha+\beta\frac{z}{t}})$ ist, wobei $z(t) := x(t + t_0) - x_0$.

(ii) Löse als Beispiel die DGL

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{x+3}{t-1}} + \frac{x+3}{t-1}$$

Lösung:
zu (i)
$\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c \\ -\gamma \end{pmatrix}$ ist wegen det $\begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \neq 0$ eindeutig nach $\begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$ auflösbar.
Sei zunächst x Lösungsfunktion und $z(t) = x(t + t_0) - x_0$

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) = \dot{x}(t + t_0) &= f\left(\frac{a(t+t_0) + bx(t+t_0) + c}{\alpha(t+t_0) + \beta x(t+t_0) + \gamma}\right) \\
&= f\left(\frac{at + at_0 + bz(t) + bx_0 + c}{\alpha t + \alpha t_0 + \beta z(t) + \beta x_0 + \gamma}\right) \\
&= f\left(\frac{at + bz(t)}{\alpha t + \beta z(t)}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{z(t)}{t}}{\alpha + \beta\frac{z(t)}{t}}\right)
\end{aligned}$$

Sei nun z Lösungsfunktion und $x(t) = z(t - t_0) + x_0$ $\dot{x} = \dot{z}(t - t_0) = f\left(\frac{a(t-t_0)+bz(t-t_0)}{\alpha(t-t_0)+\beta z(t-t_0)}\right) = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$
zu (ii)
$f(t) = \sqrt{t} + t$ mit $t_0 = 1$, $x_0 = -3$, $a = 0, b = 1$, $c = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$
Dann gilt: $\dot{z} = \sqrt{\frac{z}{t}} + \frac{z}{t}$. Sei nun $u = \frac{z}{t}$, dann ist

$$\dot{u} = \frac{\sqrt{u}}{t} = \frac{1}{t}u^{\frac{1}{2}}.$$

Lösung nach dem Schema von Bernoulli. Definiere $y(t) = u(t)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \dot{y}(t) = \frac{1}{2}\frac{1}{t} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}(\log(|t|) + c)$ für $t > 1$.
$\Rightarrow u(t) = \left(\frac{\log(|t|)+c}{2}\right)^2 \Rightarrow z(t) = t\left(\frac{\log(|t|)+c}{2}\right)^2$. Hieraus ergibt sich aus Teil (i)

$$x(t+1) + 3 = z(t) \Leftrightarrow x(t+1) = z(t) - 3$$

$$\Rightarrow x(t) = (t-1)\left(\frac{\log(|t-1|) + c}{2}\right)^2 - 3 \quad t > 0$$

Aufgabe 8 (3+3=6 Punkte)

(i) Es seien $f, g \in C_1(M)$, $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Welcher Bedingung müssen f und g genügen, dass die DGL $f(t, x) + g(t, x)\dot{x} = 0$ einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(t^2 + x^2)$ besitzt?

(ii) Löse das Anfangswertproblem

$$x\dot{x} + t + (t^2 + x^2)\cos(t) = 0 \quad , \quad x(\frac{\pi}{2}) = 1$$

Lösung:
zu (i)

$$(\mu f)_x = (\mu g)_t \Leftrightarrow \mu_x f - \mu_t g = \mu(g_t - f_x)$$

Sei nun $\mu = \mu(s) = \mu(t^2 + x^2)$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \mu_x = \mu'(s)2x \qquad \text{und} \qquad \mu_t = \mu'(s)2t \\
&\Rightarrow \mu'(s)(2xf - 2tg) = \mu(s)(g_t - f_x) \\
&\Leftrightarrow \frac{\mu'(s)}{\mu(s)} = \frac{g_t - f_x}{2xf - 2tg}.
\end{aligned}$$

Also ist es für die Existenz von $\mu = \mu(s) = \mu(t^2 + x^2)$ hinreichend und notwendig, dass $\frac{g_t - f_x}{2xf - 2tg}$ nur von $t^2 + x^2$ abhängt.
zu (ii)

$$f = t + (t^2 + x^2)\cos(t) \qquad\qquad g = x$$

Nach (i) gilt:

$$\frac{g_t - f_x}{2xf - 2tg} = \frac{0 - 2x\cos(t)}{2xt + 2x(x^2 + t^2)\cos(t) - 2tx} = -\frac{1}{t^2 + x^2}$$

Also ist $\frac{\mu'(s)}{\mu(s)} = -\frac{1}{s} \quad \Rightarrow \quad \mu(s) = e^{-\log s} = \frac{1}{s}$
$\Rightarrow \frac{t}{t^2+x^2} + \cos(t) + \frac{x}{t^2+x^2}\dot{x} = 0$ ist exakt und Φ ist gegeben durch

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2}\log(t^2 + x^2) + \sin(t) = c$$

Mit Hilfe des AWP ergibt sich dann $c = \frac{1}{2}\log(\frac{\pi^2}{4} + 1) + 1$ und für x:

$$x(t) = \sqrt{e^{2(c - \sin(t))} - t^2}.$$