Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Lösungen zu Übungsblatt 3

(Abgabe: Donnerstag, 10. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 9 *(Lipschitz-Bedingung)* (2+2+2=6 Punkte)

Untersuche ob die folgenden Funktionen auf dem angegebenen Rechteck R eine Lipschitz-Bedingung erfüllen.

(i) $f(t,x) = \log(1+e^{tx})$, $\quad R = [0,2) \times (0,1)$

(ii) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad R = [0,1) \times (x_0 - s, x_0 + s), 0 < s < x_0$

(iii) $f(t,x) = \sqrt[3]{x}$, $\quad R = [0,1) \times [0,s), s > 0$

Lösung:
zu (i)
Es gilt, dass $f_x(t,x) = \frac{1}{1+e^{tx}} te^{tx}$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |f_x(t,x)(x_1 - x_2)| \leq \sup_R |\frac{df}{dx}||x_1 - x_2| \leq 2e^2|x_1 - x_2|$$

Also erfüllt $f(t,x)$ eine Lipschitz-Bedingung auf R.
zu (ii)
Es gilt, dass $f_x(t,x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Damit ist f_x beschränkt auf R und es gilt:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |f_x(t,x)(x_1 - x_2)| \leq \sup_R |\frac{df}{dx}||x_1 - x_2| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x_0 - s)^2}}|x_1 - x_2|$$

Also erfüllt $f(t,x)$ eine Lipschitz-Bedingung auf R.
zu (iii)
Angenommen $f(t,x)$ erfüllt eine Lipschitz-Bedingung mit $0 < L < \infty$. Sei dann $x \in [0,s)$ beliebig und wähle ein $h > 0$ so, dass $h + x \in [0,s)$. Dann gilt:

$$f_x(t,x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(t,x+h) - f(t,x)}{h} \leq L < \infty \qquad \forall x \in [0,s).$$

Dies ist ein Widerspruch, da $f_x(t,x) \to \infty$ für $x \to 0$. Also erfüllt $f(t,x)$ keine Lipschitz-Bedingung auf R.

Aufgabe 10 *(Picard-Lindelöf)* (9 Punkte)

Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = t^2 + x^2, \quad x(0) = 0$$

eine eindeutige Lösung $x(t)$ auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ besitzt und dass dies das größte Lösungsintervall ist, das man aus dem Satz von Picard-Lindelöf erhalten kann. Berechne anschließend die Picard-Iterationen $x_0(t), x_1(t), x_2(t)$ und $x_3(t)$.

Lösung:
Zu $r, s > 0$ sei $R = [0,r) \times (-s,s)$ derart, dass für $f(t,x) = t^2 + x^2$ $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ erfüllt ist.
Setze $K := \sup_R |f(t,x)| = r^2 + s^2$. Betrachte die Maximierung von $l = min\left\{r, \frac{s}{r^2+s^2}\right\}$.

Wähle nun $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mit $s \to \frac{s}{r^2+s^2}$ Betrachte $g(s) = \frac{s}{r^2+s^2}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow g'(s) = \frac{r^2 - s^2}{(r^2+s^2)^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow r^2 - s^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \pm r = s \\
&\Rightarrow g''(r) < 0 \\
&\Rightarrow g(r) = \frac{1}{2r}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow l = min\left\{r, \frac{1}{2r}\right\} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}}$
Also folgt aus dem Satz von Piccard Lindelöf und dem Eindeutigkeitssatz, bei gewährleisteteter Lipschitz-Bedingung von f auf $[0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \times (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ die Existenz einer eindeutigen Lösung. Wobei $I = [0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ das größtmögliche Lösungsintervall nach Piccard-Lindelöf ist.
Iterationen:

$$\begin{aligned}
&x_0(t) \equiv 0 \\
&x_1(t) = 0 + \int_0^t f(\tau, x_0(\tau))d\tau = \frac{1}{3}t^3 \\
&x_2(t) = \int_0^t \tau^2 + \frac{1}{9}\tau^6 d\tau = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7 \\
&x_3(t) = \int_0^t \tau^2 + (\frac{1}{3}\tau^3 + \frac{1}{63}\tau^7)^2 d\tau = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{63}t^7 + \frac{2}{2079}t^{11} + \frac{1}{59535}t^{15}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (9 Punkte)

Es sei $M := [0,a] \times \mathbb{R}$ ($a > 0$ fest), $f : M \to \mathbb{R}$, $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. Dabei sei f stetig auf M und erfülle darauf eine Lipschitz-Bedingung. Ferner sei die Funktionenfolge $\{x_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ für $t \in [0,a]$ definiert durch

$$x_0(t) \equiv x_0, \quad x_{n+1} := x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_n(\tau))d\tau \quad n \geq 0.$$

Zeige: $x_n(t)$ konvergiert gleichmäßig auf $[0,a]$ und die Grenzfunktion $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t)$ ist zweimal differenzierbar auf $[0,a]$ mit $\ddot{x}(t) = f(t, x(t))$. Zeige zusätzlich, dass $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = x_1$ gilt.

Lösung:

(i) Zeige, dass die Iteration durchführbar ist $(t, x_n(t)) \in M \ \forall t \in [0,a]$. (Klar, da $x_n(t) \in (-\infty, \infty)$).

(ii)

$$\begin{aligned}
|x_1(t) - x_0(t)| &= |x_0 + tx_1 + \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_0(\tau))d\tau - x_0| \\
&\leq |tx_1| + |\int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_0)d\tau| \\
&\leq |tx_1| + K\frac{t^2}{2} \qquad K := max_{0\leq t\leq a}|f(\tau, x_0)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_2(t) - x_1(t)| &= |\int_0^t (t-\tau)\left(f(\tau, x_1(\tau)) - f(\tau, x_0(\tau))\right)d\tau| \\
&\leq L\int_0^t (t-\tau)|x_1(t) - x_0(t)|d\tau \\
&\leq L\int_0^t (t-\tau)\left(|\tau x_1| + K\frac{\tau^2}{2}\right)d\tau = \frac{|x_1|}{6}t^3 + K\frac{t^4}{24}
\end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$|x_{n+1}(t) - x_n(t)| \leq L^n \left(|x_1| \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + K \frac{t^{2n+2}}{(2n+2)!} \right)$$

Die Richtigkeit kein mittels Induktion gezeigt werden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} |x_{n+p}(t) - x_n(t)| &= \sum_{i=n}^{n+p+1} |x_{i+1} - x_i(t)| \\ &\leq \sum_{i=n}^{n+p+1} L^i \left(|x_1| \frac{a^{2i+1}}{(2i+1)!} + K \frac{a^{2i+2}}{(2i+2)!} \right) \\ &\to 0 \text{ für } n \to \infty. \end{aligned}$$

Also konvergiert nach Cauchy $x_n(t)$ gleichmäßig auf $[0, a]$.

(iii) Sei $x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \Rightarrow x$ stetig. Es gilt:

$$\begin{aligned} x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) &= x_0 + x_1 t + \lim_{n\to\infty} \int_0^t (t-\tau) f(\tau, x_{n-1}(\tau)) d\tau \\ &= x_0 + x_1 t + \underbrace{\int_0^t \underbrace{(t-\tau) f(\tau, x(\tau))}_{\text{stetig}} \, d\tau}_{\text{diff'bar}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x$ ist diff'bar und $\dot{x}(t) = x_1 + \underbrace{\int_0^t \underbrace{f(\tau, x(\tau))}_{\text{stetig}} \, d\tau}_{\text{diff'bar}}$

$\Rightarrow \dot{x}(0) = x_1$
$\Rightarrow \ddot{x} = f(t, x(t))$.