Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Lösungen zu Übungsblatt 1

(Abgabe: Donnerstag, 26. April 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 1 *(Differenzialgleichung mit AWP)* (4 Punkte)

Löse für festes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = t^\alpha x \quad , \quad x(1) = 1.$$

Lösung:

1. Fall: $\alpha \neq -1$
   $x(t) = 1e^{\int_1^t \tau^\alpha d\tau} = e^{\frac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1}-1)}$
   ist die Lösung des AWP für $t \in (0, \infty)$ falls $\alpha < -1$, $t \in [0, \infty)$ falls $\alpha > 0$ und $t \in (0, \infty)$ falls $0 > \alpha > -1$.
2. Fall: $\alpha = -1$
   $x(t) = 1e^{\int_1^t \frac{1}{\tau} d\tau} = e^{log|t|} = t$
   ist die Lösung des AWP für $t \in (0, \infty)$.

Aufgabe 2 *(Aufladung eines Kondensators)* (4+6=10 Punkte)

Wird ein Kondensator der Kapazität $C > 0$ mit einem Widerstand $R > 0$ hintereinander geschaltet und dabei eine (zeitabhängige) Spannung $U(t)$ angelegt, so gilt für den fließenden Strom $I(t)$ die Differenzialgleichung

$$R\dot{I} + \frac{1}{C}I = \dot{U}.$$

Löse dieses Problem mit Anfangswert $I(0) = I_0 > 0$

(i) für den Gleichspannungsfall $\quad \dot{U}(t) \equiv 0.$

(ii) für eine angelegte Wechselspannung $\quad U(t) = U_0 \sin \omega t \quad$ mit $\quad U_0 > 0, \omega > 0.$

Beschreiben Sie jeweils das Verhalten für $t \to \infty$.

Lösung:

zu (i)

$\dot{I} = -\frac{1}{RC}I \Rightarrow x(t) = x_0 e^{\int_0^t -\frac{1}{RC}d\tau} = I_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $x(t) \to 0$ für $t \to \infty$.

zu (ii)

$$\dot{I} = -\frac{1}{RC}I + \frac{U_0\omega\cos(\omega t)}{R} \Rightarrow I(t) = le^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}\int e^{\frac{1}{RC}s}\frac{U_0\omega\cos(\omega s)}{R}ds = le^{-\frac{1}{RC}t} + e^{-\frac{1}{RC}t}\frac{U_0\omega}{R}\underbrace{\int e^{\frac{1}{RC}s}\cos(\omega s)ds}_{*}$$

$$\begin{aligned}
* = \int e^{\frac{1}{RC}s}\cos(\omega s)ds &= Re\left\{\int e^{(i\omega+\frac{1}{RC})s}ds\right\} \\
&= Re\left\{\frac{1}{i\omega+\frac{1}{RC}}e^{(i\omega+\frac{1}{RC})t}\right\} \\
&= e^{\frac{1}{RC}t}Re\left\{\left(\frac{\frac{1}{RC}}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2} - \frac{i\omega}{\left(\frac{1}{RC}\right)^2+\omega^2}\right)(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))\right\} \\
&= e^{\frac{1}{RC}t}\left(\frac{RC}{1+(RC\omega)^2}\cos\omega t + \frac{(RC)^2\omega}{1+(RC\omega)^2}\sin(\omega t)\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow I(t) = le^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\left(\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right)$
Mit dem AWP folgt also:
$I(t) = \left(I_0 - \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\right)e^{-\frac{1}{RC}t} + \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\left(\cos(\omega t) + RC\omega\sin(\omega t)\right)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Setze nun $\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \sin\varphi$ und $\frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} = \cos\varphi$.
$\Rightarrow I(t) = \underbrace{\left(I_0 - \frac{U_0\omega C}{1+(RC\omega)^2}\right)e^{-\frac{1}{RC}t}}_{\to 0} + \frac{U_0\omega C}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\underbrace{\sin(\omega t+\varphi)}_{\to\pm 1}$
$\Rightarrow I(t)$ ist divergent um den Faktor $\pm\frac{U_0\omega C}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ für $t \to \infty$.

Aufgabe 3 *(Wachstumsprozesse)* (10 Punkte)

Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^\gamma$$

mit $\alpha, \gamma > 0$ und $\beta \geq 0$ beschreibt einen Wachstumsprozess ($\beta = 0$: exponentielles Wachstum; $\beta > 0, \gamma = 2$: logistisches Wachstum). Löse die Differenzialgleichung für den Anfangswert $x(0) = 1$.
Diskutiere anschließend das Verhalten $t \to \infty$ für die Fälle $\gamma = 2$ und $\gamma = 3$ ($\alpha,\ \beta > 0$).

Lösung:
1. Fall $\gamma = 1$
$\dot{x} = (\alpha-\beta)x \Rightarrow x(t) = e^{\int_0^t \alpha-\beta d\tau} = e^{(\alpha-\beta)t} \quad t \in \mathbb{R}$
2. Fall $\gamma \neq 1$
Bernoullische DGL: $\Rightarrow y(t) = x(t)^{1-\gamma} \Leftrightarrow x(t) = y(t)^{\frac{1}{1-\gamma}}$
$\Rightarrow \dot{y}(t) = \alpha(1-\gamma)y(t) - \beta(1-\gamma)$ mit $y(0) = 1$. Es gilt, dass

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\alpha(1-\gamma)t} - e^{\alpha(1-\gamma)t}\int_0^t e^{-\alpha(1-\gamma)\tau}\beta(1-\gamma)d\tau \\ &= e^{\alpha(1-\gamma)t} - e^{\alpha(1-\gamma)t}\left[-\frac{1}{\alpha(1-\gamma)}e^{-\alpha(1-\gamma)\tau}\beta(1-\gamma)\right]_{\tau=0}^t \\ &= e^{\alpha(1-\gamma)t}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha} \end{aligned}$$

Sei zunächst $\alpha \geq \beta \Rightarrow y(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Sei weiter $\alpha < \beta \Rightarrow y(t) > 0$
$\Rightarrow \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)e^{\alpha(1-\gamma)t} + \frac{\beta}{\alpha} > 0$
$\Leftrightarrow t > -\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{(1-\gamma)\alpha}}$
Aus der Rücksubstitution folgt dann für $x(t)$ folgendes:

1. $x(t) = e^{(\alpha-\beta)t} \qquad t \in \mathbb{R} \quad \gamma = 1$
2. $x(t) = \left(e^{\alpha(1-\gamma)t}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad t \in \mathbb{R} \quad \gamma \neq 1, \alpha \geq \beta$
3. $x(t) = \left(e^{\alpha(1-\gamma)t}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \qquad t > -\log\left(\frac{\beta}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{(1-\gamma)\alpha}} \quad \gamma \neq 1, \alpha < \beta$

Für $\gamma = 2$ gilt: $x(t) = \left(e^{-\alpha t}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{-1} \to \frac{\alpha}{\beta}$
Für $\gamma = 3$ gilt: $x(t) = \left(e^{-2\alpha t}\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} \to \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Aufgabe 4* (Bonusaufgabe) *(Integrale)* (1*+1*+1*+1*=4* Punkte)

Beim expliziten Lösen von Differenzialgleichungen kommt es auf gewisse Fertigkeiten beim Auffinden von Stammfunktionen an. Berechne die Stammfunktionen zu:

(i) $f(x) = \frac{5}{x^4+x^3-x^2-x}$

(ii) $g(x) = x^2 \cos(x)$

(iii) $h(x) = \arctan(x)$

(iv) $i(x) = x\sqrt[3]{x^2+1}$

Lösung:

zu (i)

Integration über Partialbruchzerlegung.

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{x^4+x^3-x^2-x}dx &= \int \frac{-5}{x} + \frac{5}{4}\frac{1}{x-1} + \frac{15}{4}\frac{1}{x+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{(x+1)^2}dx \\ &= -5\log x + \frac{5}{4}\log(x-1) + \frac{15}{4}\log(x+1) - \frac{5}{2}\frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

zu (ii)

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x)dx &= \sin(x)x^2 - \int 2x\sin(x)dx \\ &= \sin(x)x^2 + 2x\cos(x) - \int 2\cos(x)dx \\ &= \sin(x)(x^2-2) + 2x\cos(x)\end{aligned}$$

zu (iii)

$$\begin{aligned}\int arctan(x)dx &= \int 1arctan(x)dx \\ &= xarctan(x) - \int x\frac{1}{1+x^2}dx \\ &= xarctan(x) - \frac{1}{2}\log(1+x^2)\end{aligned}$$

zu (iv) Siehe Übung :)