Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Lösung zu Übungsblatt 7

(Abgabe: Mittwoch, 6. Juni 2012 vor der Vorlesung.)

Aufgabe 21 *(Stabilität)* (4*+4*+4*+4*=16* Zusatzpunkte)

Untersuche jeweils das lineare System $\dot{x} = Ax$ auf Stabilität.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung:

1. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1 \Rightarrow$ das System ist instabil.
2. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i \Rightarrow$ die Eigenwerte besitzen nur negative Realteile $\Rightarrow$ asymptotisch stabil.
3. Die Eigenwerte sind schwer herauszufinden. Aufgrund dessen wenden wir einen Trick an. Betrachten wir zunächst das charakteristische Polynom welches gegeben ist durch $p(\lambda) = -(\lambda^3 - 5\lambda^2 - 2\lambda - 4)$. Für die Grenzwerte gilt: $\lim_{\lambda \to \pm\infty} p(\lambda) = \mp\infty$. Des weiteren ist das charakteristische Polynom stetig. Somit existiert nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstele. Da allerdings $p(0) = 4$ gilt, muss diese Nullstelle eine positive sein. Dies ist dann gleichbedeutend damit, dass das System instabil sein muss.
4. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$. Nun bleibt nur noch zu untersuchen wie es mit der Vielfachheit der Nullstelle $\lambda = 0$ im Minimalpolynom aussieht. Das Minimalpolynom ist allerdings gegeben durch $p(\lambda) = -\lambda^2(\lambda + 2)$. Somit ist die Vielfachheit im Minimalpolynom gleich 2 $\Rightarrow$ das System ist instabil.