Dr. Gerhard Baur
Marco Laumanns

Universität Ulm
Gewöhnliche Differenzialgleichungen
Sommersemester 2012

Gewöhnliche Differenzialgleichungen - Lösungen zu Blatt 6

(Abgabe: Donnerstag, 31. Mai 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 17 *(Fundamentalsysteme)* (5 Punkte)

Finde ein Fundamentalsystem von $\dot{x} = Ax$ für $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Jordan-Methode.

(Hinweis: Mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $S^{-1}AS$ in Jordannormalform.)

Lösung: Es gilt: $\dot{x} = Ax \Leftrightarrow y := S^{-1}(x)$ mit $\dot{y} = S^{-1}ASy$. Mit Hilfe des Hinweises gilt:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} := J.$$

Es gilt nun, dass $\dot{y} = Jy$. Daraus folgt nach der allgemeinen Lösungsformel für Jordanmatrizen:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ te^{2t} & e^2t & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2}e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt dann sofort, dass

$$x(t) = Sy(t) = \begin{pmatrix} e^2t + te^{2t} & e^{2t} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} & e^{2t} \\ te^{2t} & e^{2t} & 0 & e^{2t} \\ e^{2t} + te^{2t} + \frac{1}{2}t^2e^{2t} & te^{2t} + e^{2t} & e^{2t} & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich dann für das Fundamentalsystem:

$$x_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$x_2(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_4(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18 *(Fundamentalsysteme)* (9 Punkte)

Für $t > 0$ sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t} & \frac{1}{t^2} \\ -1 & \frac{1}{t} \end{pmatrix}$$

Zeige, dass $x_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix}$ das System $\dot{x} = A(t)x$ löst und ergänze zu einem Fundamentalsystem.

Lösung:
Zunächst zeigen wir, dass $x_1(t)$ eine Lösung ist.

$$\dot{x_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix} \qquad Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2t \end{pmatrix}$$

Also ist $x_1(t)$ eine Lösung.
Um zu einem Fundamentalsystem zu erweitern verwenden wir Satz 11.
Partitionierung:

$$X_1(t) = t, X_2(t) = -t^2, A_{11}(t) = \frac{2}{t}, A_{12}(t) = \frac{1}{t^2}, A_{21}(t) = -1, A_{22}(t) = \frac{1}{t}$$

$frt > 0$.
Dann lösen wir das Hilfsproblem

$$\dot{y}* = (A_{22}(t) - X_2(t)X_1^{-1}(t)A_{12}(t))y* = \frac{2}{t}y*$$

$\Rightarrow y* = e^{2lnt} = t^2$

$$y_1(t) = \int^t X_1^{-1}(\tau)A_{12}(\tau)y*(\tau)d\tau = \log t \quad \text{für } t > 0$$

$$\Rightarrow x_2(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & 0 \\ X_2(t) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \log t \\ -t^2 \log t + t^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich dann folgendes Fundamentalsystem:

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ -t^2 \end{pmatrix} \qquad x_2(t) = \begin{pmatrix} t \log t \\ -t^2 \log t + t^2 \end{pmatrix} \quad \text{für } t > 0.$$

Aufgabe 19 *(Matrixexponentation)* (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ idempotent. Bestimme e^{tA}.

(Hinweis: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt idempotent, falls $A^2 = A$ gilt.)

Lösung:

$$\begin{aligned}\sum_{v=0}^{\infty} \frac{t^v}{v!}A^v &= E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 ... \\ &= E + tA + \frac{t^2}{2}A + \frac{t^3}{3!}A + ... \\ &= E + A\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + ...\right) \\ &= E + A(e^t - 1)\end{aligned}$$

Aufgabe 20 *(Differenzialgleichungen höherer Ordnung)* (3+3+3+3=12 Punkte)

Bestimme eine allgemeine Lösung der folgenden Differenzialgleichungen.

(i) $x^{(3)} - 2\ddot{x} - \dot{x} + 2x = 0$

(ii) $x^{(4)} + 4x^{(3)} + 6\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$

(iii) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 0$

(iv) $\ddot{x} + x = t + \sin(2t)$

Lösung:

(i) $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 2)$

$$\Rightarrow c_1 e^t, c_2 e^{-t}, c_3 e^{2t}$$

ist ein Fundamentalsystem.

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t}$$

(ii) $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1 = (\lambda + 1)^4$

$$\Rightarrow c_1 e^{-t}, c_2 t e^{-t}, c_3 t^2 e^{-t}, c_4 t^3 e^{-t}$$

ist ein Fundamentalsystem.

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t} + c_4 t^3 e^{-t}$$

(iii) $\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - (1 - i))(\lambda - (1 + i))$

$$\Rightarrow c_1 e^{(1+i)t}, c_2 e^{(1-i)t}$$

hieraus ergibt sich dann das reelle Fundamentalsystem:

$$c_1 e^t \cos(t), c_2 e^{-t} \sin(-t)$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 e^t \cos(t) + c_2 e^{-t} \sin(t)$$

(iv) Für den Homogenen Anteil ergibt sich sofort die Lösung:

$$e^{it}, e^{-it}$$

Daraus ergeben sich die reellen Lösungen:

$$x_1(t) = c_1 \cos t \quad x_2(t) = c_2 \sin t$$

Für den partikulären Anteil wählen wir folgenden Ansatz:

$$x_p(t) = \alpha t + \beta + \gamma \sin(2t) + \delta \cos(2t)$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$-4\gamma \sin(2t) - 4\delta \cos(2t) + \alpha t + \beta + \gamma \sin(2t) + \delta \cos(2t) = t + \sin(2t)$$

Mittels Koeffizientenvergleich ergibt sich: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, $\delta = 0$.

$$\Rightarrow x_p(t) = t - \frac{1}{3} \sin(2t)$$

$$\Rightarrow x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t - \frac{1}{3} \sin(2t)$$