Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
22. April 2015
Blatt 2

Übungen zu Analysis 1

(`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html`)

(Abgabe am DONNERSTAG, den 30.04.15, bis 8.15 Uhr im H13)

6. Es seien A, B und C nicht-leere Mengen und $f : B \to C$ und $g : A \to B$ bijektive Funktionen. Zeige, dass $f \circ g : A \to C$ eine bijektive Funktion ist mit $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

(5 Punkte)

7. Es seien folgende Mengen gegeben:

$$A := \{\text{Deutschland, England, Italien, USA, Vatikan}\}$$
$$B := \{\text{Gauck, Elisabeth II, Franziskus, Merkel, Obama, Napolitano}\}$$

Die Funktion $f : A \to B$ weise jedem Element aus A (Land) ihr zugehöriges Staatsoberhaupt aus B zu. Die Funktion $g : B \to A$ weise jeder Person aus B ihrem zugehörigen Land zu.

(a) Entscheiden Sie, ob die Funktionen f, g injektiv bzw. surjektiv sind.

(b) Bestimmen Sie

$$f(\{\text{Deutschland, Italien, USA}\}),\ f^{-1}(\{\text{Elisabeth II, Merkel}\}),$$
$$g(\{\text{Gauck, Fanziskus, Merkel}\}),\ g^{-1}(\{\text{Italien, Deutschland}\})$$

(2+2 = 4 Punkte)

8. Es sei $f : X \to Y$ eine Funktion und $A_1, A_2 \subset X$, sowie $B, B_1, B_2 \subset Y$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

(a) $f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c$

(b) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(c) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

(d) Zeige durch Angabe eines Beispiels, dass in (c) im Allgemeinen keine Gleichheit vorliegt.

(2+2+2+2 = 8 Punkte)

9. Untersuchen Sie folgende Relationen auf X auf Reflexivität, Symmetrie und Transitivität und geben Sie im Falle einer Äquivalenzrelationen alle Äquivalenzklassen an.

(a) Es sei $M \neq \emptyset$ und $X := \mathcal{P}(M)$. Definiere $A \sim B :\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

(b) Es sei M eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ (natürliche Zahlen) Elementen und $X := \mathcal{P}(M)$. Definiere $A \sim B :\Leftrightarrow$ A und B haben gleich viele Elemente.

(c) Es sei $M := \mathbb{R}$ (reelle Zahlen). Definiere $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$.

(3+3+3 = 9 Punkte)

10. Beweisen Sie, dass die Potenzmenge einer n -elementigen Menge genau 2^n Elemente enthält $(n \in N)$.

(4 Punkte)