Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
24. Juni 2015
Blatt 11

Übungen zu Analysis 1

(`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html`)

(Abgabe am Freitag, den 03.07.15, bis 8.15 Uhr im H14)

52. (i) Sei $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Wir definieren

$$f \text{ erfüllt auf } I \text{ eine } \textit{Lipschitz-Bedingung}$$
$$:\Leftrightarrow \exists\, L > 0 \text{ mit } |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in I$$

Zeigen Sie, dass wenn f auf I eine Lipschitz-Bedingung erfüllt, so ist f auch stetig auf I .

(ii) Zeige mittels des ϵ - δ -Kriteriums, dass die Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x}}$$

im Punkt 1 stetig ist. Bestimme also zu jedem $\epsilon > 0$ ein gefordertes $\delta = \delta(\epsilon) > 0$.

(iii) Zeige: $\displaystyle\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

(2 + 4 + 3 = 9 Punkte)

53. Zeige: Es gibt genau ein $x > 0$ mit $e^x + \log x = 3$.

(4 Punkte)

54. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiter gebe es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = \alpha$. Zeige: Die Menge

$$T := \{t \in [a, b] : f(t) = \alpha\}$$

besitzt ein Minimum.

(5 Punkte)

55. (i) Sei $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, dass f mindestens einen Fixpunkt in $[a, b]$ besitzt, d.h.

$$\exists\, \xi \in [a, b] : f(\xi) = \xi$$

(ii) Zeige: Es existiert eine stetige Funktion $g : (0, 1) \to (0, 1)$, die im Intervall $(0, 1)$ keinen Fixpunkt besitzt.

(3 + 3 = 6 Punkte)

56. Zeigen Sie, dass die Aussage vom Satz von Weierstraß im Allgemeinen falsch ist, wenn man eine Voraussetzung nicht fordert. Also geben Sie jeweils ein Beispiel an, sodass von den drei Voraussetzungen an $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ jeweils nur zwei gelten, d.h.

(i) f stetig und I abgeschlossen

(ii) f stetig und I beschränkt

(iii) I abgeschlossen und beschränkt

und die Aussage falsch wird.

(2 + 2 + 2 = 6 Punkte)