Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
20. Mai 2015
Blatt 7

Übungen zu Analysis 1

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html)

(Abgabe am Freitag, den 05.06.15, bis 8.15 Uhr im H14)

30. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $a_n := \sqrt{2+a_{n-1}}$ für $n \in \mathbb{N}$, $a_0 = 0$, konvergiert und bestimme den Grenzwert.

(6 Punkte)

31. (i) Zeige: Für $a, b > 0$ gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

(ii) Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ werden iteriert definiert über: $a_0, b_0 > 0$ fest,

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n \cdot b_n}, \qquad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}$$

Zeige: Beide Folgen konvergieren und zwar gegen denselben Grenzwert.

(2 + 6 = 8 Punkte)

32. Berechnen Sie, falls existent, den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{n^k} \cdot \binom{n}{k}$ mit $k \in \mathbb{N}_0$.

(3 Punkte)

33. Es seien (a_n) und (b_n) reelle Zahlenfolgen.

(i) Zeige: Falls $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$ und es ein $c > 0$ gibt, sodass $b_n \geq c > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $(a_n) \sim (b_n)$.

(ii) Finde ein Beispiel, sodass gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - b_n = 0$, aber $(a_n) \not\sim (b_n)$.

(3 + 2 = 5 Punkte)

34. Es seien (a_n) , (b_n) , (c_n) und (d_n) reelle Zahlenfolgen.

(i) Zeige: Falls $(a_n) \sim (b_n)$, $(c_n) \sim (d_n)$ und außerdem $a_n, b_n, c_n, d_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $a_n + c_n \sim b_n + d_n$.

(ii) Finde ein Beispiel, sodass gilt: $(a_n) \sim (b_n)$ und $(c_n) \sim (d_n)$, aber $a_n + c_n \not\sim b_n + d_n$.

(3 + 2 = 5 Punkte)

35. Beweise oder widerlege (mit einem Gegenbeispiel):
Es gelte $a_n = o(b_n)$ und $b_n \sim c_n$ für die Folgen $(a_n), (b_n)$ und (c_n) . Dann gilt auch $a_n \sim c_n$.

(3 Punkte)