Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Sommersemester 2015
10. Juni 2015
Blatt 9

# Übungen zu Analysis 1

(`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/ana1.html`)

(Abgabe am Freitag, den 19.06.15, bis 8.15 Uhr im H14)

42. Beweise die Konvergenz der Folge $(a_n)$ mit $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$ . Der Grenzwert

$$\gamma := \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

heißt *Euler-Mascheroni-Konstante.*
*Hinweis:* Zeige mit Aufgabe 38 Teil b, dass $-\frac{1}{n(n+1)} \le a_{n+1} - a_n \le 0$ für $n \in \mathbb{N}$ .

(5 Punkte)

43. Zeige:

(i) Seien $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, b_{n+1}$ reelle Zahlen, und sei $s_k := \sum_{l=1}^{k} a_l$ für $k = 1, \dots, n$ . Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

(ii) Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine konvergente Reihe, und sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine monotone, beschränkte Folge, d.h., es gilt

$$b_k \le b_{k+1} \le c < \infty \text{ bzw. } b_k \ge b_{k+1} \ge c > -\infty \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ .

(3 + 4 = 7 Punkte)

44. Man berechne den Wert folgender Reihen:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot (\frac{1}{3})^k$

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\frac{1}{2})^k$

(2 + 2 = 4 Punkte)

45. Untersuche die nachstehenden unendlichen Reihen auf Konvergenz und abs. Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k}$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+i)^k}{k!}$ (e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{2}-1)^k$ (f) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^4-2}$

(g) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3+1}$ (h) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^2}{(2k)!}$ (i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (\log k)^{-\log k}$

(je 1 Punkt, also gesamt 9 Punkte)

46. Zeige, dass die unendliche Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^{\alpha}}$$

für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergiert. (5 Punkte)