Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Sommersemester 2015
21. April 2015
Blatt 1

Übungen zu Elemente der Topologie

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 22.04.15 um 12:00 in HeHo18/220)

1. Melde dich im SLC (slc.mathematik.uni-ulm.de) für diese Vorlesung an.

2. (a) Zeige, dass die folgende Funktion eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ definiert.
$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{falls } x,y \text{ linear abhängig sind} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst} \end{cases}$$
   (b) Sei $d : V \times V \to \mathbb{R}$ eine Metrik auf einer Menge S. Definiere
$$\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}.$$
   Zeige, dass $\delta : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Metrik auf S definiert.

(4+6=10 Punkte)

3. Auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kann man wie folgt den sogenannte p-adische Betrag definieren: Sei p eine beliebige Primzahl. Sei $\nu_p(n) = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid p^k \text{ teilt } n\}$.
   Der p-adische Betrag von n ist dann definiert als $|n|_p = p^{-\nu_p(n)}$ und $|0|_p = 0$.
   (a) Berechne den 2-adischen und 3-adischen Betrag von $4, 7, 9, 192$.
   (b) Zeige, dass die p-adische Metrik $d_p(x,y) = |x-y|_p$ tatsächlich eine Metrik auf $\mathbb{Z}$ ist.
   (c) Sei p eine feste Primzahl. Bestimme für $r > 0$ und $n \in \mathbb{Z}$ die r-Umgebung $U_r(n)$, d.h. gib für gegebenes r und n an, welche Elemente von $\mathbb{Z}$ in $U_r(n)$ enthalten sind. Tipp: Betrachte zunächst nur den Fall $n = 0$.

(2+4+4=10 Punkte)

4. Ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V gegeben, so kann eine zugehörige Metrik auf V über $d(x,y) = \|x-y\|$ definieren (Vorlesung).
   Sei nun eine Metrik d auf einem Vektorraum V gegeben. Ein naheliegender Gedanke wäre, eine Norm $\|\cdot\|$ auf V über $\|x\| := d(x,0)$ zu definieren. Warum ist die so definierte Funktion im Allgemeinen keine Norm? Gib ein konkretes Beispiel an.

(4 Punkte)