Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Sommersemester 2015
1. Juni 2015
Blatt 7

Übungen zu Elemente der Topologie

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 03.06.15 um 12:00 in HeHo18/220)

Abgeben: 25, Vorrechnen: 24 und 26

24. Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{T}$ die Topologie, die aus der leeren Menge und den Komplementen der endlichen Mengen besteht. Zeige: Es gibt eine Folge in X, die gegen jeden Wert $x \in X$ konvergiert.

(3 Punkte)

25. Wir definieren den sogenannten Wisch-Operator w für abgeschlossene Intervalle wie folgt

$$w([a,b]) := \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$$

und für eine disjunkte Vereinigung abgeschlossener Intervalle durch

$$w\left(\dot{\bigcup}[a_i, b_i]\right) := \dot{\bigcup_{i \in I}} w([a_i, b_i]).$$

Sei $A_0 = [0,1]$ und A_i ergebe sich aus A_{i-1} durch $A_i = w(A_{i-1})$. Definiere die Cantormenge C als

$$C = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i$$

Zeige: Die Cantormenge C ist

(a) abgeschlossen,

(b) überabzählbar und

(c) total unzusammenhängend, d.h. in C sind nur die leere Menge und einelementige Teilmengen zusammenhängend.

(3+4+4=11 Punkte)

26. (a) Zeige, dass $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$, jeweils bzgl. der euklidischen Topologie, nicht homöomorph zueinander sind.

(b) Sei $X = \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{T}_s$ die Topologie auf $\mathbb{R}$, die von den halboffenen Intervallen erzeugt wird (vgl. Übungsaufgabe 13). Ist $(0,1]$ (bzgl. $\mathcal{T}_s$) homoömorph zu $(0,1)$ (bzgl. der euklidischen Topologie)?

(c) Ist $\mathbb{R}$ homöomorph zu $(-1,1)$ bzgl. der euklidischen Topologie?

(3+3+2=8 Punkte)