Gerhard Baur
Matthias Heinlein

Sommersemester 2015
18. Juni 2015
Blatt 9

# Übungen zu Elemente der Topologie

(http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ss15/topologie.html)

(Abgabe und Besprechung am Mittwoch, den 17.06.15 um 12:00 in HeHo18/220)

**Abgeben: 30 und 31, Vorrechnen: 32**

30. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum, in dem jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt besitzt. Zeige, dass $(X, d)$ dann folgenkompakt ist, d.h. jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ besitzt eine konvergente Teilfolge. (6 Punkte)

31. Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Für eine Teilmenge $A \subset X$ ist der Durchmesser $D(A)$ definiert durch $D(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$ . Sei ferner $(X, d)$ folgenkompakt. Zeige nun folgende Aussage:
Ist $\mathcal{A}$ eine offene Überdeckung von $X$ , so gibt es ein $\delta > 0$ , sodass für jede Teilmenge $T \subset X$ mit $D(T) < \delta$ ein $A \in \mathcal{A}$ existiert mit $T \subset A$ .

(6 Punkte)

32. Zeige nun den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent:
    (i) $X$ ist kompakt.
    (ii) Jede unendliche Teilmenge $T \subset X$ hat einen Häufungspunkt.
    (iii) $X$ ist folgenkompakt.

    Hinweis: Zeige für $(iii) \Rightarrow (i)$ zunächst, dass aus der Folgenkompaktheit von $X$ folgt, dass $X$ für jedes $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung mit $\epsilon$ -Kugeln besitzt.
    Außerdem sind die obigen Aufgaben und ein Satz aus der Vorlesung zu gebrauchen.

(6 Punkte)