Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Höhere Mathematik III für Ingenieure
WiSe 2010/11

Übungsblatt 01

(Abgabe und Besprechung: Mittwoch 27. Oktober 2010 um 8 Uhr c.t., O27/2203)

Aufgabe 1 *(Vektorraum)* (8 Punkte)

Zeige, dass $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, $n \in \mathbb{N}$ ein Vektorraum ist, wobei

$$\begin{aligned} + : \quad & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ & \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cdot : \quad & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ & \left(\lambda, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 *(Untervektorraum)* (3+1=4 Punkte)

(i) Zeige, dass

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ x = 4y \right\}$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

(ii) Begründe, wieso

$$U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ , \ y = x + 1 \right\}$$

kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 3 *(Polynome, Untervektorraum)* (3 Punkte)

Es sei

$$\mathbb{C}[x] := \left\{ \sum_{k=0}^{N} a_k x^k, \ N \in \mathbb{N}_0, \ a_k \in \mathbb{C}, \ k = 0, \dots, N \right\}$$

der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Zeige, dass

$$\mathbb{C}_n[x] := \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \ , \ a_k \in \mathbb{C} \ , k = 0 \dots n \right\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{C}[x]$ darstellt.

Aufgabe 4 *(Lineare Unabhängigkeit)* (je 1 Punkt=8 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob folgende Systeme von Vektoren linear unabhängig sind oder nicht.

(i) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(ii) $\left(\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$

(iii) $\left(\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$

(iv) $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

(v) $\left(\begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}\right)$

(vi) $\left(1\,,\, t^2+2\,,\, t^2+1\right)$

(vii) $\left(t\,,\, 3t^2+2\,,\, \frac{1}{2}\right)$

(viii) $\left(1\,,\, t\,,\, \frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right)$

Aufgabe 5 *(Linearkombinationen)* (2+2=4 Punkte)

Es sei $v_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $w_1 = t^2$, $w_2 = 1$ und $w_3 = t+3$.

(i) Stelle $v = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 und v_4 dar.

(ii) Finde eine passende Linearkombination aus w_1, w_2 und w_3 um $w = \frac{4}{5}t^2 + 12t + 15$ darzustellen.