Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter
Universität Ulm

Höhere Mathematik III für Ingenieure
WiSe 2010/11

Übungsblatt 8

(Abgabe und Besprechung: **Dienstag** 15. Februar 2011 um 8 Uhr c.t., N24/226)

"One of the endlessly alluring aspects of mathematics is that its thorniest paradoxes have a way of blooming into beautiful theories. " - *Philip J. Davis (*1923), American applied mathematician.*

Aufgabe 42 *(Oberflächen, Oberflächenintegrale)* (6+4=10 Punkte)

(i) Berechnen Sie die Oberfläche des hyperbolischen Paraboloids $\mathcal{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = \frac{x^2-y^2}{2}\,,\ x^2+y^2 \leq R^2 \right\}$, wobei $R > 0$ fest, sowie $\int_{\mathcal{P}} f\, d\sigma$ mit $f(x,y,z) = z + y^2 + \frac{1}{2}$.

(ii) Berechnen Sie die Oberfläche des Torus $\mathcal{T} = \left\{ \begin{pmatrix} (R + r\sin\varphi)\cos\psi \\ (R + r\sin\varphi)\sin\psi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \psi \leq 2\pi \right\}$, wobei $0 \leq r \leq R$ fest.

Aufgabe 43 *(Flächeninhalt)* (10 Punkte)

Die Kuppel der Reaktorstation in Garching hat die Form eines halben Rotationsellipsoid

$$\frac{x^2}{15^2} + \frac{y^2}{15^2} + \frac{z^2}{30^2} = 1\ ,\ z \geq 0. \qquad \text{[in m]}$$

Welchen Flächeninhalt hat das Blechdach?
(Hinweis: Verwenden Sie Polarkoordinaten.)

Aufgabe 44 *(Kurvenintegrale)* (4+4+4=12 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Vektorfelder f konservativ in G sind. Berechnen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion, sowie $\int_k f$ für die jeweils angegebene(n) Kurve(n) k mit Parameterisierung $x(t)$.

(i) $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ y > 0 \right\}$, $f(x,y,z) = (z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y)$ und $k:\ x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 + \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(ii) $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$.

(a) $k:\ x(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$

(b) $k:\ x(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$

(iii) $G = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $f(x) = \frac{x^T}{||x||_2}$ für $n \geq 2$, sowie $k:\ x(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$.

Aufgabe 45 *(Exakte Differentialgleichung)* (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $f(x,y) = (1 + e^x y, 2y + e^x)$ konservativ in $G = \mathbb{R}^2$ ist und lösen Sie damit das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} 1 + e^x y + (2y + e^x)y' &= 0 \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

Aufgabe 46 *(Möbiusband)* (3+5=8 Punkte)

Gegeben sei das zweidimensionale Flächenstück $\mathcal{F}$ (Möbiusband) mit Parameterisierung

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} (2+u\cos v)\cos 2v \\ (2+u\cos v)\sin 2v \\ u\sin v \end{pmatrix} \ , \ 0 \le u \le 1 \ , \ 0 \le v \le 2\pi$$

mit der "geometrischen Randkurve"$\partial\mathcal{F}$ mit Parameterisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} (2+\cos t)\cos 2t \\ (2+\cos t)\sin 2t \\ \sin t \end{pmatrix} \ , \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Ferner sei $f(x,y,z) := \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ für $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G := \mathbb{R}^3 \backslash \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{R} \right\}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot}(f) = 0$ auf G.

(ii) Berechnen Sie $\int_{\partial\mathcal{F}} f$.

Aufgabe 47 *(Anwendung - Satz von Gauß)* (5 Punkte)

Bei der Lösung der Poissongleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \ , \quad \text{auf } \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u &= 0 \ , \quad \text{auf } \Gamma := \partial\Omega \end{aligned}$$

wird eine Funktion $u \in L^2(\Omega)$ gesucht, die eben diese Gleichungen erfüllt. Die schwache Variationsformulierung zu obigem Problem lautet: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$\int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx = \int_\Omega f v \, dx.$$

wobei

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega) \ : \ \exists \text{ eine schwache Ableitung von } v \text{ und } v = 0 \text{ auf } \Gamma \right\}$$

einen sogenannte Sobolev-Raum darstellt. Beweisen die folgende Identität

$$-\int_\Omega \Delta u \, v \, dx = \int_\Omega \nabla v \nabla u \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$