Blatt 8

Abgabe: Fr, 17.12.2010 vor der Übung.

Aufgabe 8.1: Komplexe Potenzen (1+2)

(a) Berechnen Sie i^i und $\cos(1+2i)$.

(b) Geben Sie für $z, w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine hinreichende Bedingung an, unter der

$$z^a \cdot w^a = (z \cdot w)^a$$

gilt.

Aufgabe 8.2: Komplexe Sinus-Funktion (2+1+2+2+1+2)

(a) Beweisen Sie für Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ das Additionstheorem:

$$\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

(b) Skizzieren Sie die Bilder der Geraden $\operatorname{Re} z = c$ und $\operatorname{Im} z = c$ für $c \in \mathbb{R}$ unter der Sinus-Funktion.

(c) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist der Wert $\sin z \in \mathbb{R}$?

(d) Bestimmen Sie $A, B \subset \mathbb{C}$ mit $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subset A$, so dass $\sin\colon A \to B$ bijektiv ist.

(e) Drücken Sie die Umkehrfunktion $\arcsin\colon B \to A$ mit Hilfe des komplexen Logarithmus aus.

(f) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Riemann-DGLen für die Sinus-Funktion gelten.

Aufgabe 8.3: Cauchy-Riemann-DGLen (3)

Sei eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben, komplex differenzierbar bei $z := re^{i\varphi} \neq 0$. Seien g, h reellwertige Funktionen, so dass $f(re^{i\varphi}) = g(r,\varphi) + i\,h(r,\varphi)$ gilt. Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen g_r, g_φ, h_r, h_φ existieren und folgende Identitäten erfüllen:

$$g_r = \frac{1}{r} h_\varphi \qquad\qquad h_r = -\frac{1}{r} g_\varphi.$$

Aufgabe 8.4: Holomorphie (je 1)

Auf welchen Bereichen $G \subset \mathbb{C}$ sind folgende Funktionen holomorph?

a) $f(z) := iz$,

b) $f(z) := |z|^2$,

c) $f(z) := z \operatorname{Re} z$,

d) $f(z) := \tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$.