Blatt 10

Abgabe: Fr., 21.01.2011 vor der Übung.

Aufgabe 10.1: Vereinigung von Elementargebieten (2)
Es seien $D_1, D_2, \dots \subset \mathbb{C}$ Elementargebiete mit $D_1 \subset D_2 \subset \dots$. Zeigen Sie, dass die Vereinigung $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ ein Elementargebiet ist.

Aufgabe 10.2: Gebiet, Elementargebiet, Sterngebiet (4)
Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und argumentieren Sie, ob es sich bei folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ um Gebiete, Elementargebiete oder Stengebiete handelt:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 1 \text{ und } |z+i| > \frac{3}{2}\}$,
(b) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z-1| < 5 \text{ und } |z-1+i| > 5\}$
(c) $\{z \in \mathbb{C} \colon |z^2-3| < 1\}$,
(d) $\{z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \colon 1 < r < 2 \text{ und } -\pi < \varphi < \pi\}$.

Aufgabe 10.3: Kurvenintegrale (6)
Gegeben sei die komplexe Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

(a) Berechnen Sie komplexe Kurvenintegrale

(i) $\int\limits_{|\zeta-i|=1} f(\zeta)d\zeta$, (ii) $\int\limits_{|\zeta+i|=1} f(\zeta)d\zeta$, (iii) $\int\limits_{|\zeta|=2} f(\zeta)d\zeta$.

(b) Sei $R > 1$ und γ_1 und γ_2 Wege wie in Abb. 1. Zeigen Sie die Identität $\int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta = \pi$.

(c) Zeigen Sie $\lim\limits_{R\to\infty} |\int_{\gamma_2} f(\zeta)d\zeta| = 0$ gilt und berechnen Sie damit das unbestimmte reelle Integral $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$.

Aufgabe 10.4: Cauchyscher Integralsatz und Integralformel (6)
Berechnen Sie folgende Integrale (mit $n \in \mathbb{N}$):

(a) $$\int\limits_{|\zeta|=3} \frac{\cos \pi\zeta}{\zeta^2-1}d\zeta,$$ (b) $$\int\limits_{|\zeta|=3} \frac{e^{-\zeta}}{(\zeta+2)^3}d\zeta,$$ (c) $$\int\limits_{|\zeta-2|=1} \frac{\zeta^7+1}{\zeta^2(\zeta^4+1)}d\zeta,$$

(d) $$\int\limits_{|\zeta-i|=1} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^2+1}d\zeta,$$ (e) $$\int\limits_{|\zeta|=3} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^2+1}d\zeta,$$ (f) $$\int\limits_{|\zeta-1|=1} \frac{\zeta^n}{(\zeta-1)^n}d\zeta.$$

Aufgabe 10.5: Liouville (2)
Gegeben sei eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und ein $M > 0$ so, dass $\operatorname{Re} f(z) < M$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

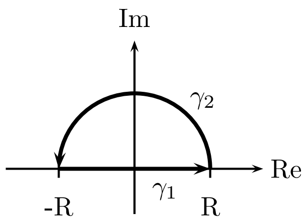

Abbildung 1: Integrationswege γ_1, γ_2