Blatt 11

Abgabe: Fr., 28.01.2011 vor der Übung.

Aufgabe 11.1: Die Gammafunktion (2+1+2)

Sei $\Gamma(z) := \int\limits_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(a) Die Funktion $\Gamma(z)$ ist holomorph in $D := \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z > 0\}$.

(b) Auf D genügt sie der Funktionalgleichung $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)$.

(c) Man kann $\Gamma(z)$ (eindeutig) holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{-k\colon k \in \mathbb{N}_0\}$ fortsetzen.

Aufgabe 11.2: Holomorphe Fortsetzung (I) (1+1)

Argumentieren Sie auf welche (maximalen) Gebiete folgende Funktionen $f(z)$ holomorph fortsetzbar sind?

$$\text{(a)} \quad f(z) := \sum_{k=0}^\infty z^{2k}, \qquad \text{(b)} \quad f(z) := \sum_{k=0}^\infty z^{nk} \text{ für festes } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 11.3: Holomorphe Fortsetzung (II) (2+2+2)

(a) Zeigen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussage:
Sei $f(z) := \sum\limits_{k=0}^\infty a_k z^k$ eine Potenzreihe um 0 mit Konvergenzradius $R > 0$ und sei $f(z)$ in einer Umgebung vom Punkt $z_0 \in \partial U_R(0)$ holomorph fortsetzbar. Dann ist die Potenzreihe $f(z)$ in z_0 konvergent.

(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{k=0}^\infty z^{k!}$.

(c) Ist $f(z)$ aus (b) über den Konvergenzradius R hinaus fortsetzbar? Begründen Sie!

Aufgabe 11.4: Fibonacci-Zahlen (1+2)

Die Fibonacci-Zahlen als die Zahlenfolge (F_n) definiert durch

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Betrachten Sie deren erzeugende Potenzreihe $f(z) := \sum\limits_{k=0}^\infty F_n z^n$.

(a) Berechnen Sie, welche holomorphe Funktion $f(z)$ um $z_0 = 0$ diese Entwicklung als Potenzreihe hat.

(b) Berechnen Sie eine Potenzreihen-Entwicklung von $f(z)$ um $z_0 = 0$, in der keine Terme in den Fibonacci-Zahlen auftauchen. Schließen Sie so auf einen geschlossenen Term für die F_n in $n \in \mathbb{N}$.

Bitte Rückseite beachten!

Aufgabe 11.5: Maximumprinzip (2+2)

Sei f eine auf dem Gebiet G holomorphe, nicht-konstante Funktion. Zeigen Sie:

(a) In G kann $|f|$ kein von Null verschiedenes Minimum annehmen.

(b) In G kann $\operatorname{Re} f$ kein Minimum und kein Maximum annehmen.

Aufgabe 11.6: Identitätssatz (1+1)

Gegeben sei die Funktion $f(z) := \sin(\frac{1}{1-z})$. Zeigen Sie:

(a) Im Inneren des Einheitskreises ist f holomorph.

(b) Die Funktion f besitzt dort unendlich viele Nullstellen. Warum ist f trotzdem nicht die Nullfunktion?