Blatt 2

Abgabe: Do, 04.11.2010 in der Vorlesung.

Aufgabe 2.1: Einfacher Stromkreis mit Kondensator (3+3)

Betrachten Sie die Reihenschaltung eines Kondensators mit Kapazität $C = 10$ (Farad) und eines Verbrauchers mit Widerstand $R = 10$ (Ohm). Bezeichne $U(t)$ die angelegte Spannung zum Zeitpunkt t in Volt und $I(t)$ die Stromstärke in Ampere.

(a) Es liege konstant die Spannung $U \equiv 100$ an und die Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $I(0) = 10$. Skizzieren Sie den Verlauf von $I(t)$ mit der Zeit. Was passiert für $t \to \infty$?

(b) Nun liege eine Wechselspannung $U(t) = 100 \cdot \sin(50t)$ an. Die Stromstärke zum Zeitpunkt $t = 0$ sei $I(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $I(t)$ für große t auch eine Schwingung vom Typ $A \cdot \sin(50t + \psi)$ ist.

Aufgabe 2.2: Zerfallsreihe (5)

Sei ein radioaktiver Stoff A mit Zerfallskonstante $\lambda > 0$ gegeben, d.h. wenn $x(t)$ die Menge des Stoffes A zum Zeitpunkt $t \geq 0$ bezeichnet, sei der Zerfall durch die Gleichung $\dot{x} = -\lambda x$ modelliert. Sei das Produkt B des Zerfalls wiederum radioaktiv mit Zerfallskonstante $\lambda_2 > 0$ und $y(t)$ die Menge des Stoffes B zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Gelte für den Zeitpunkt $t = 0$ folgendes für die Stoffmengen: $x(0) = 1,\ y(0) = 0$. Geben Sie explizit Gleichungen für die Stoffmengen $x(t),\ y(t)$ an. Unterscheiden Sie dabei $\lambda \neq \lambda_2$ und $\lambda = \lambda_2$. Skizzieren Sie den Verlauf von $x(t)$ und $y(t)$.

Aufgabe 2.3: logistisches Wachstum (5)

Seien Konstanten $\alpha, \beta > 0$ gegeben. Lösen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung gegeben durch $\dot{x} = \alpha x - \beta x^2$ für $x(0) = c < \frac{\alpha}{\beta}$. Zeigen Sie, dass der Limes $L := \lim_{t\to\infty} x(t)$ existiert. Zeigen Sie weiter, dass $x(t)$ einen Wendepunkt t_0 besitzt, für den $x(t_0) = \frac{L}{2}$ gilt. Skizzieren Sie $x(t)$.

Aufgabe 2.4: Bernoulli, Ricatti (2+2)

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme:

(a) $\dot{x} = \sqrt{x} \cdot \sin t$ mit $x(0) = \frac{1}{4}$.

(b) $\dot{x} = tx^2 - \frac{x}{t} - \frac{2}{t^3}$ mit $x(2) = 1$ (Tipp: Es existieren Lösungen der Form c/t^2).