Wiederholungsblatt

Keine Abgabe.

Aufgabe 1:

Bestimme die Lösung der folgenden AWPs mit maximalen Lösungsintervallen:

(a) $\dot{x}(t) + 2t^{-1}x(t) = 4t, \quad x(1) = 0,$

(b) $\dot{x}(t) = (1 + (x(t))^2)(1 + t), \quad x(0) = 0,$

(c) $2\sin(t)\cos(t) + x(t) + t\dot{x}(t) = 0, \quad x(\pi/2) = 0.$

Aufgabe 2:

Es sei $\omega \in \mathbb{R}$. Gegeben sei das AWP

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass für die n-te Picard-Iterierte x_n die Identität

$$x_n = \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(\omega t)^k}{k!}, \sum_{k=0}^{n} (-1)^{\lfloor (k-1)/2 \rfloor} \frac{(\omega t)^k}{k!} \right)^t$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass x_n für $n \to \infty$ gegen die Lösung des AWP konvergiert.

Aufgabe 3:

Gegeben folgendes DGLS $\dot{x} = Ax + b(t),\ x(0) = (0, 0, -\frac{4}{9})^t$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie ein FS für die homogene DGLS $\dot{x} = Ax$ an.

(b) Geben Sie eine partikuläre Lösung für das inhomogen DGLS $\dot{x} = Ax + b(t)$ an.

(c) Lösen Sie das AWP $\dot{x} = Ax + b(t),\ x(0) = (0, 0, -\frac{4}{9})^t$.

Aufgabe 4:

Bestimme eine Basis des Lösungsraumes der homogenen linearen DGL

$$x^{(4)} - 2x^{(3)} + 2\ddot{x} - 2\dot{x} + x = 0.$$

Aufgabe 5:

Existiert eine ganze Funktion $f(z)$ mit $f(0) = 4$, so dass $\operatorname{Re} f(x, y) = u(x, y)$ für folgende Funktionen $u(x, y)$ gilt. Wenn ja, dann geben Sie die Funktion $f(z)$ an.

(a) $u(x, y) := (x + 2)^2 - y^2,$ (b) $u(x, y) := e^{x-y}.$

Aufgabe 6:

Bestimmen Sie die Singularitäten folgender Funktionen und berechnen Sie deren Residuen:

$$\text{(a)}\qquad f(z) := \frac{\cos(z)}{z^4 + 8z^2 + 16}, \qquad\qquad \text{(b)}\qquad f(z) := z^3 \cosh(1/z).$$

Aufgabe 7: (a) Berechnen Sie folgende komplexe Kurvenintegrale:

$$\text{(i)}\quad \oint\limits_{|z|=3} \frac{\sin z}{z^2 + 2z + 1} dz, \quad \text{(ii)}\quad \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z} dz, \quad \text{(iii)}\quad \oint\limits_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^2(1-z)} dz.$$

(b) Es sei $f(z) = \frac{1}{2-z^2}$ und es sei γ ein geschlossener Weg, auf dem keine Singularitäten von f liegen. Welche Werte kann das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz$ annehmen?

Aufgabe 8:

Berechne folgende reelle Integrale:

$$\text{(a)}\qquad \int\limits_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^4 + 8x^2 + 16} dx, \qquad\qquad \text{(b)}\qquad \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \cos(x)} dx.$$