Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 2

(Abgabe: Mittwoch, 02. November 2011 vor der Übung.)

”Die Logik ist die Hygiene, deren sich der Mathematiker bedient, um seine Gedanken gesund und kräftig zu erhalten.”
- Hermann Klaus Hugo Weyl, 1885-1955, deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph.

Aufgabe 5 *(Unstetigkeit bei Ableitungen)* (4+6=10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist mit $f'(0) = 0$.

(b) Zeigen Sie, $f'(x)$ an der Stelle $x = 0$ unstetig ist.

Aufgabe 6 *(Gleichmäßige Stetigkeit)* (3+3+2+4=12 Punkte)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : x, y \in I : \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(a) Beweisen Sie, dass wenn die Ableitung $f'(x)$ existiert und beschränkt ist, so ist f auf I gleichmäßig stetig.

(b) Zeigen Sie, dass $f_1(x) = \frac{1}{x}$ auf $I = (0, 1]$ nicht gleichmäßig stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass $f_2(x) = \arctan x$ auf $I = \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(d) Zeigen Sie, dass $f_3(x) = \sqrt{x}$ auf $I = [0, \infty)$ gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 7 *(Translationsinvarianz von $R[a, b]$)* (8 Punkte)

Sei $f \in R[a, b]$, $h > 0$ und $g : [a + h, b + h] \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := f(x - h)$. Zeigen Sie

$$g \in R[a + h, b + h] \qquad \text{und es gilt} \qquad \int_{a+h}^{b+h} g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Aufgabe 8 *(Unstetigkeit bei Integranten)* (12 Punkte)

Es sei eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben und

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & , x \neq c \\ y \neq f(c) & , x = c. \end{cases}$$

mit $y \in \mathbb{R}$ und $c \in [a, b]$. Also eine Funktion $\tilde{f}$, die an einer Stelle abgeändert wurde. Zeigen Sie, dass gilt

$$\tilde{f} \in R[a, b] \qquad \text{und} \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx.$$

Bemerkung: Aufgabe 5 zeigt, dass bei der Ableitung f' Unstetigkeitsstellen auftreten können und in diesem Beispiel Oszilliationsstellen sind. Dass hierfür keine Sprungstellen in Frage kommen, zeigt der Zwischenwertsatz für Ableitungen.

Satz 1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(a) < y < f'(b)$. Dann*

$$\exists\, \xi \in (a, b) \quad \textit{mit} \quad f'(\xi) = y.$$

Aufgabe 9 *(Zwischenwertsatz für Ableitungen)* (10* Punkte)

Beweisen Sie Satz 1, also den Zwischenwertsatz für Ableitungen.
