Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 9

(Abgabe: Mittwoch, 21. Dezember 2011 vor der Übung.)

"Mir wird applaudiert, weil mich jeder versteht, und Ihnen weil Sie niemand versteht."
- *Charles Chaplin zu Albert Einstein.*

Definition und Eigenschaften vom Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$

Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren $v = (v_1, v_2, v_3)^T$, $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ aus $\mathbb{R}^3$ ist wie folgt definiert

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

und hat die Eigenschaften

- $v \times w \perp v$ und $v \times w \perp w$,
- $||v \times w||$ ist der Flächeninhalt des von v und w aufgespannten Parallelogramms,
- $(v, w, v \times w)$ bilden ein rechtsorientiertes System, d.h. $\det(v, w, v \times w) \geq 0$.

Aufgabe 36 *(Ableitung von Skalarfeldern)* (4+6=10 Punkte)

(a) Berechnen Sie für

$$f(x, y, z) = z \log(x + y^2)$$

die partiellen Ableitungen und die Hesse-Matrix.

(b) Sei $f(x, y) = x^2 y^3$ und $a = (1, 1)^T \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die Tangentialebene an die Fläche $z = f(x, y)$ durch $(a, f(a))^T$. Berechnen Sie die Richtungsableitung in Richtung Südwest bei a einmal mit der Definition und mit Hilfe von Satz 114(iii). In welcher Richtung ist

$$\frac{\partial}{\partial v} f(a)$$

maximal und wie groß ist die maximale Richtungsableitung?

Aufgabe 37 *(Ableitung von Vektorfeldern)* (3+3+4=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie f' von

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} z^2 y \log x \\ y^z \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie T' und $\det T'$ von

$$T(r, \varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} r \cos\varphi \cos\vartheta \\ r \sin\varphi \cos\vartheta \\ r \sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

(c) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^T A x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Bestimmen Sie f' und die Hesse-Matrix von f.

Aufgabe 38 *(Satz von Schwarz)* (4+3=7 Punkte)

(a) Sei

$$f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Bestimmen Sie f_{xy} und f_{yx} und berechnen Sie diese im Punkt $(0,0)$. Zeigen Sie damit, dass die Stetigkeits-Bedingung an die gemischten Ableitungen notwendig für die Folgerung im Satz von Schwarz ist.

(b) Zeigen Sie: Es gibt keine Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla F(x,y) = (y, -x)$.

Aufgabe 39 *(Möbiusband)* (8 Punkte)

Es sei das Möbiusband gegeben durch die Parameterisierung

$$F(s,t) = \begin{pmatrix} (2 + s\cos t)\cos(2t) \\ (2 + s\cos t)\sin(2t) \\ s\sin t \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq s \leq 1,\ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Berechnen Sie $F(0,0)$ und $F(0,\pi)$, sowie F_s und F_t. Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $F_s \times F_t$ an den Punkten $(0,0)^T$ und $(0,\pi)^T$. Was bedeutet das Ergebnis?

Aufgabe 40 *(Kochsche Schneeflockenkurve)* (5 Punkte)

Es ist Adventszeit und die ersten Schneeflocken fallen (hoffentlich) bald vom Himmel. In dieser Aufgabe konstruieren wir unsere eigene Schneeflocke. Ausgehend von einem gleichseitigen Dreieck, wird jede Seite in drei gleich große Teile geteilt und ein kleineres, gleichseitiges Dreieck auf das mittlere Teilstück drauf gesetzt (vgl. Abbildung **??**).

Zeigen Sie, dass der Umfang dieser Schneeflocke unendlich groß wird, der Flächeninhalt aber beschränkt bleibt.

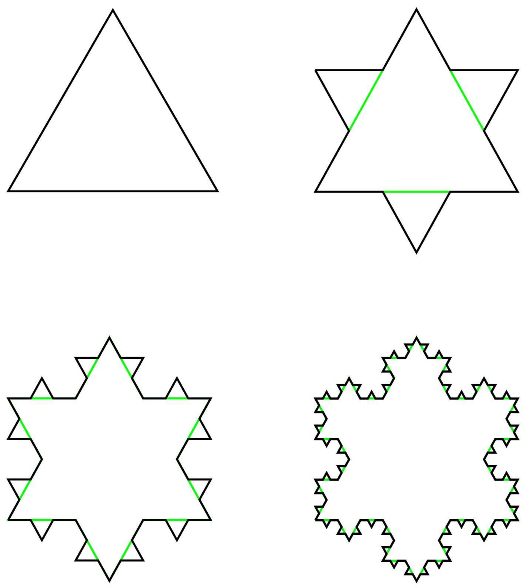

Abbildung 1: Kochsche Schneeflockenkurve.