Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 11

(Abgabe: Mittwoch, 18. Januar 2012 vor der Übung.)

"Das gründliche Studium der Natur ist die fruchtbare Quelle mathematischer Entdeckungen."
- Jean-Baptiste-Joseph Fourier, 1768 - 1830, französischer Mathematiker und Physiker.

Aufgabe 46 *(Orthogonalität)* (8 Punkte)

In der nächsten Aufgabe ist es nützlich zu wissen, dass $\{\cos(kx) : k = 0 \ldots n\}$ und $\{\sin(kx) : k = 1 \ldots n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ Orthogonalsysteme bezüglich dem Skalarprodukt

$$\langle f,\, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

bilden. Beweisen Sie, dass $\{\cos(kx) : k = 0 \ldots n\}$ ein Orthogonalsystem bildet, also zeigen Sie

$$\begin{aligned} \langle \cos(kx),\, \cos(jx)\rangle &= \delta_{kj} \qquad k, j = 1 \ldots n \\ \langle 1,\, \cos(jx)\rangle &= 2\delta_{0j} \qquad j = 0 \ldots n \end{aligned}$$

wobei $\delta_{kj} := \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$.

Anmerkung: Ferner kann man zeigen, dass gilt

$$\begin{aligned} \langle \sin(kx),\, \cos(jx)\rangle &= 0 \qquad k = 0 \ldots n,\ j = 1 \ldots n \\ \langle \sin(kx),\, \sin(jx)\rangle &= \delta_{kj} \qquad k, j = 1 \ldots n. \end{aligned}$$

Aufgabe 47 *(Fourierreihenentwicklung)* (12 Punkte)

Sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$. Gesucht sind die Koeffizienten

$$a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$$

für

$$F_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

so, dass

$$||f - F_n||_2^2 := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - F_n(x))^2\, dx$$

minimal wird. Zeigen Sie

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\, dx \quad \forall k = 0 \ldots n \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\, dx \quad \forall k = 1 \ldots n. \end{aligned}$$

(*Hinweis: Dies ist eine Minimierungsaufgabe. Sie dürfen die Integration und Differentiation vertauschen.*)

Aufgabe 48 *(Komplexe Exponentialfunktion)* (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar an jeder Stelle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$ ist. Zeigen Sie weiter, dass jede lokale Umkehrfunktion $f^{-1}(u,v)$

$$(f^{-1})'(u,v) = \frac{1}{u^2+v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}$$

erfüllt.

Aufgabe 49 *(Lokale Umkehrung der Kugelkoordinaten)* (12 Punkte)

Es sei

$$f(r,\varphi.\vartheta) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Ermitteln Sie die Werte, für welche f lokal umkehrbar ist. Bestimmen Sie weiter eine Formel ähnlich wie in Aufgabe 48 für $(f^{-1})'(u,v,w)$, wobei $f^{-1}(u,v,w)$ eine Umkehrfunktion bezeichnet.