Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Analysis II
Wintersemester 2011/12

Analysis II - Übungsblatt 14

(Abgabe: Mittwoch, 08. Februar 2012 vor der Übung.)

"Das entscheidende Kriterium ist Schönheit; für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt kein beständiger Platz."
- *Godfrey Harold Hardy, 1877 - 1947, britischer Mathematiker.*

Aufgabe * *(Anmeldung zur Vorleistung und zur Klausur)* (0 Punkte)

Melden Sie sich **bis spätestens 08.02.2012** im Hochschulportal (`http://portal.uni-ulm.de/PortalNG/index.html`) für die Vorleistung an. Bitte melden Sie sich danach vom 16. Februar bis 05. März 2011 zur eigentlichen Klausur an, sofern ihre Übungspunkte mehr als 281 Punkte betragen.

Aufgabe 56 *(Parameterintegrale)* ((3+3)+9=15 Punkte)

(a) Berechnen Sie

$$\text{(i)} \frac{d}{dx}\int_1^2 \frac{\cos(xt)}{t}dt \qquad \text{(ii)} \quad \frac{d}{dx}\int_1^{x^5} \frac{\cos(xt)}{t}dt.$$

(b) Zeigen Sie

$$F(x) := \int_1^2 \frac{1}{\sin t}\cos(xt)\,dt \quad \in R[0,1] \qquad \text{und berechnen Sie } \int_0^1 F(x)\,dx.$$

Aufgabe 57 *(Gammafunktion)* (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gammafunktion $\Gamma(x)$ differenzierbar ist für alle $x > 0$ und es gilt

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log t\,dt.$$

Aufgabe 58 *(Kurvenintegrale)* (5+5+5=15 Punkte)

Untersuchen Sie, ob folgende Vektorfelder f Gradientenfelder in G sind. Berechnen Sie gegebenenfalls eine Stammfunktion, sowie $\int_k f$ für die jeweils angegebene(n) Kurve(n) k mit Parameterisierung $x(t)$.

(i) $G = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ y > 0\right\}$, $f(x,y,z) = (z^2, \frac{e^z}{y} + y, 2xz + e^z \log y)$ und $k: \ x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 + \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2\pi$.

(ii) $G = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

(a) $k: \ x(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, 0 \le t \le \frac{3}{2}\pi$ (b) $k: \ x(t) = \begin{pmatrix} -t \\ 1-t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 1$

(iii) $G = \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $f(x) = \frac{x^T}{||x||_2}$ für $n \ge 2$, sowie $k: \ x(t) = t(1,1,\dots,1)^T$, $0 \le t \le 1$.
