Übungen zur Variationsrechnung

Übungsblatt 1

Dr. Gerhard Baur
Daniel Hauer

WS 2012/2013

Die erste Übung findet am Donnerstag, den 08. November 2012 in N24/131 statt.

Aufgabe 1. Im Folgenden soll bestimmt werden, ob das Funktional $I(x)$ ein globales Minimum annimmt unter der Menge aller Funktionen $x : [a,b] \to \mathbb{R}$ die stückweise glatt[1] sind auf dem vorgegebenen Intervall $[a,b]$ und die vorgegebenen Randbedingungen erfüllen. Begründe deine Aussage und gebe, falls möglich, ein Minimum x von $I(x)$ an. Löse *ad hoc* durch genaues Hinschauen:

(i) $$I(x) = \int_1^2 \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt, \qquad [a,b] = [1,2],\ x(1) = x(2) = 1,$$

(ii) $$I(x) = \int_0^1 \dot{x}\,dt, \qquad [a,b] = [0,1],\ x(0) = 0,\ x(1) = 1,$$

(iii) $$I(x) = \int_{-1}^1 x^2\,(1-\dot{x})^2\,dt, \qquad [a,b] = [-1,1],\ x(-1) = 0,\ x(1) = 1,$$

(iv) $$I(x) = \int_0^1 t\,x\,\dot{x}\,dt, \qquad [a,b] = [0,1],\ x(0) = x(1) = 0.$$

---

[1] Wir nennen eine Funktion $x \in \mathrm{C}[a,b]$ *stückweise glatt*, falls es eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ gibt, so dass die Ableitung $\dot{x} \in \mathrm{C}[t_{\nu-1}, t_\nu]$ für alle $\nu = 1, \ldots, k$.