Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 1

(Abgabe: Mittwoch, 24. Oktober 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 1 *(Darstellung des Limes inferior)* (10 Punkte)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte, reelle Folge. Zeigen Sie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\left(\inf_{n\geq k} a_n\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} a_n$$

Aufgabe 2 *(Mengenlehre)* (4+6=10 Punkte)

(i) Es seiein A_k, $k \in \mathbb{N}$ abzählbar viele Mengen. Zeigen Sie:

Es gibt eine Folge monoton wachsender Mengen B_k, d.h. $B_k \subset B_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und eine Folge paarweise disjunkter Mengen C_k, d.h. $C_i \cap C_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$, mit

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k.$$

(ii) Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen. Dann definiert

$$\liminf_{k\to\infty} A_k := \{x : x \in A_n \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}$$

der Limes inferior dieser Mengenfolge. Zeigen Sie:

$$\liminf_{k\to\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n.$$

("fast alle" bedeutet: alle, bis auf endlich viele.)