Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 2

(Abgabe: Mittwoch, 31. Oktober 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 3 *(σ-Algebren)* (3+3+3=9 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob es sich in folgenden Situationen jeweils um eine Algebra, oder sogar eine σ-Algebra handelt.

a) $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{N}, \{2k : k \in \mathbb{N}\}, \{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}\}$

b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} : E$ ist Vereinigung endlich vieler Intervalle$\}$

c) $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{E \subset \mathbb{R} : E$ ist abzählbar oder E^c ist abzählbar$\}$

Aufgabe 4 *(Erzeugendensystem, Borel-σ-Algebra)* (5+6=11 Punkte)

a) Es sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie

$$\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{E}_1 \subset \sigma(\mathcal{E}_2) \text{ und } \mathcal{E}_2 \subset \sigma(\mathcal{E}_1)$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe von a), dass die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ nicht nur von allen offenen Intervallen erzeugt wird, sondern auch von

(i) allen kompakten Intervallen der Form $[a, b]$

(ii) allen Intervallen der Form $[a, \infty)$

(iii) allen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$.