Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 3

(Abgabe: Mittwoch, 7. November 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 5 *(Maße)* (4+4=8 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob es sich bei folgenden Abbildungen um ein Maß handelt

a) $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ mit $\mu(E) = \begin{cases} 0 & , E \text{ endlich} \\ \infty & , E \text{ nicht endlich} \end{cases}$

b) $\mu : \mathcal{A} := \{E \subset \mathbb{R} : E \text{ abzählbar oder } E^c \text{ abzählbar}\} \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $\mu(E) = \begin{cases} 0 & , E \text{ abzählbar} \\ \infty & , E \text{ überabzählbar} \end{cases}$.

Aufgabe 6 *(Cantor'sche Wischmenge)* (3+3+6=12 Punkte)

Es sei der *Wischoperator* w gegeben durch

$$w([a,b]) := \left[a, a + \frac{b-a}{3}\right] \cup \left[b - \frac{b-a}{3}, b\right]$$

und

$$w\left(\bigcup_{k=1}^{n} [a_k, b_k]\right) := \bigcup_{k=1}^{n} w([a_k, b_k]) \text{ , } n = 1, \ldots, \infty$$

mit disjunkten Intervallen $[a_k, b_k]$. Definiere nun die Mengenfolge

$$C_0 := [0,1], \quad C_{n+1} := w(C_n) \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

sowie die Cantor-Menge C durch

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Zeigen Sie:

a) C_n ist wohldefiniert für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) $C \in \mathcal{B}$.

c) C ist überabzählbar.