Dr. Gerhard Baur
B.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 4

(Abgabe: Mittwoch, 14. November 2012 vor der Übung.)

Aufgabe 7 *(Cantormenge als überabzählbare, lebesque'sche Nullmenge)* (4 Punkte)

Sei λ das Lebesque-Maß und C die Cantor-Menge, vgl. Aufgabe 6. Zeigen Sie

$$\lambda(C) = 0.$$

Aufgabe 8 *(Darstellungssatz)* (5+3=8 Punkte)

Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Zeigen Sie:

a) Sei $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\mu(E) := \sum_{n \in E} a_n$$

ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Wann ist μ endlich und wann σ-endlich?

b) Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Dann

$$\exists \text{ eindeutige } a_n \geq 0, n \in \mathbb{N} \text{ mit } \mu(E) = \sum_{n \in E} a_n \quad \forall E \in \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Aufgabe 9 *(Maß des Limes inferior)* (8 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $E_n \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n \to \infty} E_n \in \mathcal{A},$$

und es gilt

$$\mu\left(\liminf_{n \to \infty} E_n\right) \leq \liminf_{n \to \infty} \mu(E_n).$$