



---

Maßtheorie - Übungsblatt 7  
(Abgabe: Mittwoch, 05. Dezember 2012 vor der Übung.)

---

**Aufgabe 14** (*Nullmenge*)

(8 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend, differenzierbar und  $f'$  sei beschränkt. Zeigen Sie für  $E \subset \mathbb{R}$

$$\lambda(E) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_f(E) = 0.$$

**Aufgabe 15** (*Translationsinvarianz*)

(8 Punkte)

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \geq 0$  und  $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$  ein Maßraum mit

$$\mu(E) := \sum_{n \in E} a_n$$

Zeigen Sie:

$$\mu \text{ ist translationsinvariant} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Folge } (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konstant.}$$

Das heißt,  $\exists c \geq 0$  mit  $\mu(E) = c \sum_{n \in E} 1$ , also ist  $\mu$  ein Vielfaches des Zählmaßes.

**Aufgabe 16** (*Lebesguemaß offener/kompakter Mengen*)

(2+2=4 Punkte)

Zeigen Sie:

a)  $\emptyset \neq E \subset \mathbb{R}$  offen  $\Rightarrow \lambda(E) > 0$

b)  $E \subset \mathbb{R}$  kompakt  $\Rightarrow \lambda(E) < \infty$ .