Dr. Gerhard Baur
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 11

(Abgabe: Mittwoch, 16. Januar 2013 vor der Übung.)

Aufgabe 25 *(Doppelfolge)* (4 Punkte)

Sei (f_{mn}) eine Doppelfolge mit $f_{mn} \geq 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ und $b_n := \liminf_{m\to\infty} f_{mn}$ existiere für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \;\leq\; \liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}.$$

Aufgabe 26 *(Konkretes Integral)* (5 Punkte)

Sei der Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ gegeben. Berechnen Sie, falls existent das Integral

$$\int_I f \, d\lambda$$

für $I = [0, \pi]$ und

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

Aufgabe 27 *(Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes von Lebesgue)* (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes von Lebesgue:

Sei $f_n, g_n, g \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $|f_n| \leq g_n$, $g_n \to g$ μ-fast überall, und $f_n \to f$ (punktweise). Weiter gelte

$$\int g_n \, d\mu \to \int g \, d\mu < \infty.$$

Dann gilt $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und

$$\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu.$$

Aufgabe 28 *(Positive Mengen und Hahn-Zerlegung)* (2+3=5 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und λ ein signiertes Maß auf Ω. Zeigen Sie

a) $P_1, P_2 \in \mathcal{A}$ positiv $\quad\Rightarrow\quad P_1 \cup P_2$ positiv

b) $(P_1, N_1), (P_2, N_2)$ Hahn-Zerlegungen von $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda) \quad\Rightarrow\quad \lambda(P_1 \cap E) = \lambda(P_2 \cap E) \;\; \forall\, E \in \mathcal{A}$.

Hinweis: Betrachte $\lambda(P_1 \setminus P_2 \cap E)$.