Dr. Gerhard Baur
M.Sc. Pascal Heiter

Universität Ulm
Maßtheorie
Wintersemester 2012/2013

Maßtheorie - Übungsblatt 12

(Abgabe: Mittwoch, 23. Januar 2013 vor der Übung.)

Aufgabe 29 *(Darstellungen der Gammafunktion)* (10 Punkte)

Gegeben sei die Gammafunktion

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad , x > 0.$$

Zeigen Sie die folgenden Darstellung für $x > 0$

a)

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

b)

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

Hinweis zu a): Für $0 \le x \le 1$ *gilt* $1 - x \le e^{-x}$.

Aufgabe 30 *(Höldersche Ungleichung)* (3+3+4=10 Punkte)

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $p > 1$ und $q > 1$ konjugierte Indizes, d.h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Sei $0 < \alpha < 1$ und $\varphi(t) := \alpha t - t^\alpha$. Zeigen Sie

$$\varphi(t) \ge \alpha - 1 \qquad \forall\, t > 0$$

b) Sei $A, B > 0$. Zeigen Sie

$$AB \le \frac{1}{p}A^p + \frac{1}{q}B^q$$

c) Seien f, g messbar und $|f|^p, |g|^q \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeigen Sie, dass dann

$$fg \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

und es gilt

$$\int |fg|\, d\mu \le \left(\int |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$