Gerhard Baur
Jonas Eckert
Marcus Heitel

Wintersemester 14/15
13. Januar 15
Blatt 12

Übungen zu Analysis 3

(Abgabe und Besprechung am Dienstag, den 27.01.15 um 16:00 Uhr im H12)

22. (Anwendung der Greenschen Integralformel)
Wir möchten im Folgenden ein Variationsproblem diskutieren. Sei dazu $K \subset \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, für die die Greensche Integralformel gilt. Betrachte für $z(x,y) \in C_1(O)$, $O \supset K$ offen:

$$I = I(z) = \iint\limits_K f(x,y,z(x,y),z_x(x,y),z_y(x,y))\,d(x,y)$$

bei gegebenen $f = f(x,y,z,p,q) \in C_1(\mathbb{R}^5)$. $I(z)$ soll minimiert werden über alle C_1 -Funktionen $z(x,y)$, welche auf ∂K vorgeschriebene Werte annehmen. $\bar{z}(x,y)$ sei ein solches Minimum.
Zeige: Dann gilt:

$$f_z(\cdot) = \tfrac{\partial}{\partial x} f_p(\cdot) + \tfrac{\partial}{\partial y} f_q(\cdot) \qquad \forall (x,y) \in \mathring{K}$$

$$(\text{wobei } (\cdot) = (x,y,\bar{z}(x,y),\bar{z}_x(x,y),\bar{z}_y(x,y))\ )$$

Anleitung:

(i) Beweise zunächst:
Sei $g : K -> \mathbb{R}$ stetig auf K und es gelte $\iint\limits_K g(x,y)\eta(x,y)\,d(x,y) = 0$ für alle Funktionen η , die auf einer offenen Menge $O \supset K$ stetig differenzierbar sind und $\eta \equiv 0$ auf ∂K .
Dann gilt: $g \equiv 0$ auf $\mathring{K}$.

(ii) Sei $\eta(x,y) \in C_1(O)$, $\eta \equiv 0$ auf ∂K . Betrachte für ε , $|\varepsilon| \leq \varepsilon_0$, wobei $\varepsilon_0 > 0$ klein genug, $F(\varepsilon) = I(\bar{z} + \varepsilon\eta)$. Dann besitzt F bei $\varepsilon = 0$ ein lokales Minimum.

(12 Punkte)

23. Es sei das Möbiusband gegeben durch die Parametrisierung

$$F(s,t) = \begin{pmatrix} (2 + s\cos t)\cos(2t) \\ (2 + s\cos t)\sin(2t) \\ s\sin t \end{pmatrix} , \qquad 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Berechnen Sie $F(0,0)$ und $F(0,\pi)$, sowie F_s und F_t . Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $F_s \times F_t$ an den Punkten $(0,0)^T$ und $(0,\pi)^T$. Was bedeutet das Ergebnis?

(4 Punkte)

Mehr Informationen zur Veranstaltung gibt es unter:
`http://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws14150/ana3.html`