Universität Ulm

Dr. G. Baur
M. Gerlach
WS 2013/14

Erste Klausur Analysis II

1. Berechnen Sie (12)

(a) eine Stammfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := x^2 e^x$.

(b) den Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

2. Es sei $M := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $f : M \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) := 12x + 8y$. Zeigen Sie, dass $\max_M f$ und $\min_M f$ existieren und berechnen Sie diese Werte. (14)

3. Berechnen Sie für $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$ das Integral (10)

$$\iiint_M xz^2 \,\mathrm{d}(x,y,z).$$

4. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch $f(x,y) := (x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3)^T$ gegeben. Zeigen Sie, dass f bei $(1,1)^T$ lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion besitzt und berechnen Sie die Ableitung dieser Umkehrfunktion im Punkt $(-2,2)^T$. (10)

5. Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie ggf. ihre Ableitung. (20)

(a) $n = 1,\ f(x) := \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

(b) $n = 1,\ f(x) := \displaystyle\int_1^2 \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t$

(c) $n = 1,\ f(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}$

(d) $n = 3,\ f(x,y,z) := x\log(z^2 + e^y + 1)$

6. Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie folgende Aussagen. (10)

(a) Das Innere $\mathring{M}$ ist offen.

(b) Der Rand ∂M is abgeschlossen.

7. Bestimmen und klassifizieren Sie alle lokalen Extremstellen der durch $f(x,y) := x^3 + 6xy + y^2$ gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (12)

8. Untersuchen Sie nachstehende Funktionenfolgen $f_n : M \to \mathbb{R}$ auf gleichmäßige Konvergenz. (12)

(a) $M = \mathbb{R},\ f_n(x) := |\sin x|^n$

(b) $M = [0,\infty),\ f_n(x) := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k^2}$