Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
2. Februar 2016
Blatt 14

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

65. Bestimme den (minimalen) Abstand der Parabel $y = x^2$ zur Geraden $y = x - 1$.

(6 Punkte)

Lösung: Die Parabel lässt sich darstellen als $P = \left\{(x, x^2)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\right\}$, die Gerade als $G = \left\{(y, y-1)^T \in \mathbb{R}^2 : y \in \mathbb{R}\right\}$. Gesucht ist also

$$\min_{x,y} f(x,y) \quad \text{mit} \quad f(x,y) := (x-y)^2 + (x^2 - y + 1)^2.$$

- **Existenz des minimalen Abstands**
  Die Existenz des minimalen Abstandes ist auf den ersten Blick völlig unklar, zeichnerisch jedoch intuitiv. Die Beweisidee ist nun die stetige Funktion f auf eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ einzuschränken:
  Für $|x-y| \to \infty$ gilt $f(x,y) \geq (x-y)^2 \to \infty$. Ebenso folgt aus $|x^2 - y| \to \infty$ auch $f(x,y) \geq (x^2 - y + 1)^2 \to \infty$ wegen $|x^2 - y| \leq |x^2 - y + 1| + 1$. Also existieren o.B.d.A. Konstanten $C_1, C_2 > 0$ mit $|x-y| \leq C_1$ und $|x^2 - y| \leq C_2$. Damit folgt:
  $y - x \leq C_1$ und $x^2 - y \leq C_2$, also inbesondere $C_1 + x \geq y \geq x^2 - C_2$.
  $\Leftrightarrow x^2 - x \leq C_1 + C_2 \quad \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 \leq C_1 + C_2 + \frac{1}{4} =: c^2 \quad \Leftrightarrow |x - \frac{1}{2}| \leq c.$
  Also gilt: $|x| \leq |x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2} \leq c + \frac{1}{2}$ sowie $|y| \leq |y - x| + |x| \leq C_1 + c + \frac{1}{2}$. Da die Menge $K := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq c + \frac{1}{2},\, |y| \leq C_1 + c + \frac{1}{2}\right\}$ kompakt ist, existiert das Minimum von f auf K (Satz von Weierstraß) und damit auch in der kompletten Ebene $\mathbb{R}^2$.

- **Bestimmung des Abstandes**
  Notwendige Bedingung für ein Extremum ist $\nabla f(x,y) = (0,0)$.
  Mit $\nabla f(x,y) = \big(2(x-y)4x(x^2 - y + 1),\, -2(x-y) - 2(x^2 - y + 1)\big)$ folgt durch Summation der beiden Bedingungen $(x^2 - y + 1)(4x - 2) = 0.$ Wäre $x^2 - y + 1 = 0$, so ergibt sich aus der Bedingung an den Gradienten sofort $x = y.$ Da aber die Gleichung $x^2 + 1 = y = x$ keine reelle Lösung x besitzt, ergibt sich also ein Widerspruch.
  Damit folgt $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$. Aus der Bedingung an den Gradienten erkennt man $-1 + 2y - 2(\frac{1}{4} - y + 1) = 0 \Leftrightarrow 4y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow y = \frac{7}{8}$. Damit ist das Minimum gefunden und der gesuchte Abstand berechnet sich als

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{(4-7)^2 + (2+1)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{9 \cdot 2} = \frac{3}{8}\sqrt{2}$$