Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
16. November 2015
Blatt 6

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 24.11.15 12:15 Uhr im H14

22. Entwickle die folgenden Funktionen in eine Potenzreihe um $x = 0$ und bestimme den Konvergenzradius

(a) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$ (b) $\arctan x$.

(2 x 4 = 8 Punkte)

23. Entscheide, ob folgende Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf M gleichmäßig konvergieren.

(a) $f_n(x) := \dfrac{1}{1+n^2x^2}, \quad M = [0, \infty)$

(b) $f_n(x) := \dfrac{1}{1+n^2x^2}, \quad M = (0, \infty)$

(c) $f_n(x) := \dfrac{1}{1+n^2x^2}, \quad M = [\delta, \infty)$ für ein $\delta > 0$

(d) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\big(x \cdot \sin(x)\big)^k}{k!}, \quad M = [0, 1].$

(2+2+2+3= 9 Punkte)

24. Löse die Rekursion $a_{n+2} = \dfrac{3}{2}a_{n+1} - \dfrac{1}{2}a_n$ $(n \geq 2)$ mit $a_0 = 2$ und $a_1 = 3$ explizit, d.h. finde eine Formel $a_n = f(n)$, wobei die rechte Seite $f(n)$ nur von n , nicht jedoch von a_k für ein $k \in \mathbb{N}$ abhängt.
Anleitung: Betrachte die „erzeugende Funktion“ als formale Potenzreihe

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

d.h. es muss kein Konvergenzradius berechnet werden und Gleichungen wie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = x \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ dürfen formal verwendet werden. Berechne aus der Rekursionsvorschrift eine Darstellung von $F(x)$ und entwickle diese als Potenzreihe(n).

(5 Punkte)

25. Für $n \in N$ sei $f_n : [0, 2] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3x^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x, & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechne, falls existent

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in [0,2]$. (c) $\int\limits_0^2 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$

Konvergiert f_n gleichmäßig auf $[0,2]$?

(4 x 1 = 4 Punkte)

26. Seien die Funktionen $f_n : M \to \mathbb{R}$ beschränkt durch $f_n(x) \geq a > 0 \ \forall x \in M, n \in \mathbb{N}$ und gleichmäßig konvergent in M gegen f . Zeige, dass auch $\frac{1}{f_n}$ gegen $\frac{1}{f}$ gleichmäßig in M konvergiert.

(4 Punkte)

27. Wir wollen einen auf ganz $\mathbb{R}$ stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion konstruieren. Definiere dazu $g(x) := |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ und setze g periodisch in $\mathbb{R}$ fort (mit Periode 1). Definiere für $j \in \mathbb{N}$: $g_j(x) := \frac{1}{2^j} g(2^j x)$, sowie

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(x).$$

(a) Skizziere g, g_1 und g_2 in $[-1,1]$.

(b) Zeige, dass f stetig ist.

(c) Zeige, dass f in keinem Punkt differenzierbar ist.

Anleitung für Teil (c): Es darf folgende Aussage verwendet werden: Ist eine Funktion f differenzierbar in x_0 und konvergieren die Folgen $(x_n), (y_n)$ beide gegen x_0 für $(n \to \infty)$ mit $y_n - x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(x_0).$$

Verwende nun $x_n = \frac{k_n}{2^n} \leq x_0 \leq \frac{k_n + 1}{2^n} = y_n$ für gewisse ganze Zahlen $k_n \in \mathbb{Z}$.

(1+2+3 = 6 Bonuspunkte)