Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
30. November 2015
Blatt 8

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 08.12.15 12:15 Uhr im H14

33. Bestimme zu folgenden Mengen M jeweils das Innere $\mathring{M}$, den Abschluss $\overline{M}$ und den Rand ∂M (jeweils ohne Beweis).

(a) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \geq y^2 \text{ und } y > 2x - 3 \right\}$ (b) $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1} \right] \subset \mathbb{R}$

(c) $M = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,: n \in \mathbb{N},\, q \in \mathbb{Q} \right\}$.

(3 x 2 = 6 Punkte)

34. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in R^n$. Zeige: $x \in \overline{M}$ gilt genau dann, wenn es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ gibt mit $x_n \to x$ für $n \to \infty$.

(5 Punkte)

35. Gegeben seien Mengen $A, B \subset \mathbb{R}^n$. Beweise oder widerlege für folgende Mengen M_1, M_2, ob die Aussagen $M_1 \subset M_2,\ M_2 \subset M_1$ bzw. $M_1 = M_2$ gelten:

(a) $M_1 = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ und $M_2 = (A \mathring{\cap} B)$
(b) $M_1 = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $M_2 = \overline{A \cap B}$
(c) $M_1 = \partial A \cap \partial B$ und $M_2 = \partial\,(A \cap B)$.

(3 x 3= 9 Punkte)

36. Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, sowie $\varepsilon > 0$. Zeige:

$$U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \|x - y\| < 2\varepsilon.$$

(4 Punkte)

37. Für $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $\|x\|_\infty := \sup\limits_{k=1,\dots,n} |x_k|$ (d.h. $\|x\|_\infty$ ist die betragsmäßig größte Komponente von x). Zeige, dass gilt:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \|x\|_\infty .$$

(2 Punkte)

38. Wir betrachten folgende Optimierungsaufgabe: $\max\{f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 \,:\, (x,y)^T \in M\}$, mit der Menge $M := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$. Skizziere die Niveaumengen $N_c = \{(x,y)^T : f(x,y) = c\}$ für $c = 0,\ c = 1,\ c = 4$ und M. Bestimme zeichnerisch die Lösung der Optimierungsaufgabe.

(4 Punkte)