Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
15. Dezember 2015
Blatt 10

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 22.12.15 12:15 Uhr im H14

45. (a) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xe^{\sin y} + xyz^2$. Bestimme den Gradienten und die Hesse-Matrix von f .

    (b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Berechne den Gradienten und die Hesse-Matrix von $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^T Ax$.

    (c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 + y^2 - 2xy$ und $a = (1,1)^T$. Bestimme die Richtungsableitung von f in a in Richtung Nordwest auf 2 Arten: mit Hilfe der Definition **und** mit Hilfe des Gradienten.

    (d) In welcher Richtung wird die Richtungsableitung von Teil (c) maximal?

    (3 + 4 + 3 + 1 = 11 Punkte)

46. (a) Gibt es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f(x) = \left(e^{x^2} + y^3, -3xy^2 + \sin y\right)$? Begründe deine Antwort.

    (b) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

    $$f(x,y) := \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$$

    Berechne $f_{xy}(x,y)$ und $f_{yx}(x,y)$ für $(x,y) \neq (0,0)$. Zeige, dass gilt: $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

    (2 + 5 = 7 Punkte)

47. Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

    (a) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend, so ist auch $A \cap B$ zusammenhängend.

    (b) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so ist auch $A \cap B$ konvex.

    (c) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängend und ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ zusammenhängend.

    (d) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^n$ konvex und ist $A \cap B \neq \emptyset$, so ist auch $A \cup B$ konvex.

    (4 x 2 = 8 Punkte)

48. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine partiell differenzierbare Funktion, bei der alle partiellen Ableitungen beschränkt sind. Zeige, dass dann f stetig ist.

    (4 Punkte)