Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
11. Januar 2016
Blatt 12

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 19.01.16 12:15 Uhr im H14

54. Betrache folgende Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{3x} + y^3 - 3ye^x$. Charakterisiere alle lokalen Extremstellen von f . Gilt die Aussage von Aufgabe 2 (Blatt 1) auch für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$? Begründe deine Antwort!

   (6 Punkte)

55. Gegeben seien (Mess-)Werte $y_i \in \mathbb{R}$ an den (verschiedenen) Stellen $x_i \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$. Beim Eintragen der Daten in ein Koordinatensystem fällt auf, dass die Punkte (x_i, y_i) fast auf einer Geraden liegen. Gesucht ist nun eine solche Ausgleichsgerade der Form $y = ax + b$, die die Daten bestmöglichst approximiert. Diese kann zum Beispiel durch Minimierung der Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^{k} (ax_i + b - y_i)^2$ bestimmt werden. Berechne mithilfe dieser Methode die rellen Größen a und b .

   (5 Punkte)

56. Zur Ergänzung der notwendigen Kriterien für lokale Extrema beweise folgende Aussage:
   Ist a lokales Minimum einer Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $f \in C_2(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, so gilt $f''(a) \geq 0$.

   (3 Punkte)

57. Bestimme die (dreidimensionale) Schachtel (ein Quader) mit Volumen 1 und minimaler Oberfläche (d.h. Boden und Seitenflächen - ohne Decke).

   (5 Punkte)

58. Gegeben seien die Geraden g durch die Punkte $(1, 1, 1)^T$ und $(2, 3, 4)^T$, sowie h durch die Punkte $(0, 1, 0)^T$ und $(1, 1, -1)^T$.

   (a) Formuliere ein Optimierungsproblem, dessen Lösung der minimale Abstand zwischen den beiden Geraden ist und löse dieses Problem.

   (b) Zeige, dass der Vektor des kürzesten Abstandes zwischen den Geraden orthogonal zu beiden Geraden ist.

   (4+1 = 5 Punkte)

59. Zeige, dass eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ genau dann konvex ist, wenn $\forall\, k \in \mathbb{N}$ und $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(x_i) \quad \forall\, x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n.$$

   (6 Punkte)