Gerhard Baur
Matthias Heinlein
Marcus Heitel

Wintersemester 2015/2016
20. Januar 2016
Blatt 13

Übungen zu Analysis 2

(https://www.uni-ulm.de/mawi/mawi-stukom/baur/ws1516/analysis-2.html)

Abgabe bis zum 26.01.16 12:15 Uhr im H14

60. Für $G \subset \mathbb{R}^2$ sei $f : G \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{pmatrix}.$$

(i) Es sei $G = \mathbb{R}^2$. Zeige, dass $\det f'(x) > 0$ für alle $x \in G$, aber f nicht injektiv ist.

(ii) Es sei nun $G = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi)$. Bestimme $f(G)$. Zeige, dass f in jedem Punkt $\binom{x}{y} \in G$ eine differenzierbare lokale Umkehrfunktion besitzt und gib eine Formel für die Ableitung dieser Umkehrfunktion an.

(iii) Kehre f in einem von dir gewählten Bereich explizit lokal um, berechne die Ableitung der Umkehrung und vergleiche mit (ii).

(3+4+5 = 12 Punkte)

61. Betrachte die Kurve

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 y^3 + x^3 y = 2 \right\}.$$

Zeige: K geht durch den Punkt $(1, 1)$, ist dort lokal nach y auflösbar und diese Auflösung ist dort monoton fallend. (6 Punkte)

62. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2z^2 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 + z^2 &= 4 \end{aligned}$$

lokal bei $(1, 1, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $y(x)$ und $z(x)$ aufgelöst werden kann. Bestimme $y'(1)$ und $z'(1)$. (6 Punkte)

63. Minimiere $x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 \leq 1$. Für die Untersuchung des Randes benutze **nicht** die Regel von Lagrange, sondern eine geeignete Parametrisierung des Randes.

(6 Punkte)