Lösung zu Aufgabe 53:

$f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y) \Rightarrow \quad \nabla f(x,y) = (\cos x + \cos(x+y),\ \cos y + \cos(x+y))$.
Aus $\nabla f(x,y) \stackrel{!}{=} (0,0)$ folgt

$$\cos x = \cos y = -\cos(x+y) \tag{1}$$

Wir betrachten zuerst, wann $\cos x = \cos y$ gilt: Da $x, y \in (0, 2\pi)$, gilt $\cos x = \cos y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x = 2\pi - y$ gilt.

Fall 1: $x = y$. Dann gilt mit (1) $\cos x = -\cos 2x$. Nach dem Additionstheorem für den doppelten Winkel gilt dann $\cos x = -(2\cos^2 x - 1)$, also erfüllt $\cos x$ die Gleichung $2z^2 + z - 1 = 0$. Deren Lösungen sind nach der Mitternachtsformel $z_1 = \frac{1}{2}$ und $z_2 = -1$. Wann ist $\cos x = z_i$? Es gilt $\cos x_{1/2} = \frac{1}{2}$ genau für $x_1 = \frac{1}{3}\pi$ und $x_2 = \frac{5}{3}\pi$ im Intervall $(0, 2\pi)$. Die andere Gleichung $\cos x_3 = -1$ gilt genau dann, wenn $x_3 = \pi$ ist. Da wir im Fall $x = y$ sind, erhalten wir also die drei kritischen Punkte

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3}\pi \\ \frac{1}{3}\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{5}{3}\pi \\ \frac{5}{3}\pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \end{pmatrix}$$

Fall 2: $x = 2\pi - y$. Dann gilt mit (1):

$$\cos x = -\cos(x+y) = -\cos(2\pi - y + y) = -\cos 2\pi = -1$$

und $x_3 = \pi$ tritt hier somit nochmal als Lösung auf (das ist genau der Wert, bei dem Fall 1 und Fall2 zusammenfallen).

Klassifizierung der kritischen Punkte: Hesse-Matrix:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \sin(x+y) & -\sin(x+y) \\ -\sin(x+y) & -\sin y - \sin(x+y) \end{pmatrix}$$

$$H_f\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ ist negativ definit, denn } -\sqrt{3} < 0 \text{ und } \det H_f(...) > 0$$

$$H_f\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ ist positiv definit, denn } \sqrt{3} > 0 \text{ und } \det H_f(...) > 0$$

$$H_f(\pi, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ erlaubt keinerlei Aussage, genauere Untersuchung notwendig}$$

Zu (π, π) : an dieser Stelle liegt kein Extremum, sondern ein Sattelpunkt vor, denn: Man kann zeigen, dass $f(\pi + \varepsilon, \pi + \varepsilon) < 0$ für kleine ε ist, während $f(\pi - \varepsilon, \pi - \varepsilon) > 0$ gilt.
Beweis: Betrachte $g(x) = f(x,x) = 2\sin x + \sin 2x = 2\sin x + 2\sin x \cos x = 2\sin x \cdot (1 + \cos x)$. Für kleine ε gilt $\sin(\pi+\varepsilon) < 0$ und $\sin(\pi-\varepsilon) = -\sin(\pi+\varepsilon) > 0$. Weiter gilt $\cos(\pi+\varepsilon) = \cos(\pi-\varepsilon) > -1$. Damit folgt: $g(x+\varepsilon) < 0$ und $g(x+\varepsilon) > 0$, die entsprechende Aussage gilt für f .

Insgesamt folgt: Bei $\left(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi\right)$ lieft ein Maximum vor (Wert $\frac{3}{2}\sqrt{3}$), bei $\left(\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi\right)$ ein Minimum (Wert $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$), bei (π, π) ein Sattelpunkt mit Wert 0.