(72) Mit Kugelkoordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\Theta \\ r\sin\varphi\cos\Theta \\ r\sin\Theta \end{pmatrix}$

und Volumenelement $r^2\cos\Theta$

Die Bedingung $x^2+y^2+z^2 \le 1$ ist dann trivialerweise erfüllt,

$x,y,z \ge 0$ übersetzt sich zu $\varphi \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\Theta \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$\Rightarrow$ Schwerpunkt eines Körpers K berechnet sich wie folgt:

X-Koord. des Schwp. ist $\frac{1}{|K|}\cdot\int\cdots\int_K x \, d(x,y,z)$ usw.

$$\Rightarrow \iiint_K x \, d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r\cos\varphi\cos\Theta \cdot r^2\cos\Theta \, d\Theta\, d\varphi\, dr =$$

$$= \int_0^1\int_0^{\pi/2} r^3\cdot\cos\varphi\cdot\left[\tfrac{1}{2}\sin\Theta\cos\Theta+\tfrac{1}{2}\Theta\right]_0^{\pi/2} d\varphi\, dr =$$

$$= \int^1 r^3\left[\sin\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{4}\, dr = \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{1}{16}\pi$$

entspr.

$$\iiint_K y \, d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^3\sin\varphi\cos^2\Theta\, d\Theta\, d\varphi\, dr =$$

die drei Integrale sind unabhängig voneinander daher kann man sie auseinander ziehen

$$= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1\cdot\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/2}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{16}\cdot(+1) = \frac{\pi}{16}$$

entspr.

$$\iiint_K z \, d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^3\sin\Theta\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi\, dr$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{nach } r}\cdot\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{nach } \varphi}\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\Theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{16}$$

und $|K| = \iiint_K 1 \, d(x,y,z) = \int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} r^2\cos\Theta\, d\Theta\, d\varphi\, dr =$

$$= \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^1\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\left[\sin\Theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow S_x = S_y = S_z = \frac{\pi/16}{\pi/6} = \frac{3}{8}$$

73 $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx$

Problem: Keine Stammfkt von $\sin(y^2)$ bekannt

↳ mit Fubini Reihenfolge vertauschen, Integrationsgebiet. $0 \le x \le 1$, $x \le y \le 1$

d.h. $0 \le y \le 1$ und $0 \le x \le y$ $\Rightarrow$

1P

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[x \cdot \sin(y^2) \right]_0^y dy =$$

$$= \int_0^1 y \sin(y^2)\, dy = \left[-\frac{1}{2} \cos(y^2) \right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2}\cos(0)$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(1)\right)$$

2P