Universität Ulm
Gerhard Baur
Bianca Jaud

Übungen zum Seminar

Grundlagen der Mathematik

Blatt 1

Abgabe: Dienstag 20.10.2015

Aufgabe 1 (2 + 2,5 + 2 + 2,5 + 2 = 11 Punkte)

Es sei im Folgenden $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

(a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$

(b) $(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad x \geq -1$

(c) $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{n!} \quad \text{für} \quad n \geq 2$

Zur Erklärung:

$n!$ ist die Fakultät von n. Es gilt $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = \prod\limits_{k=1}^{n} k$.

Analog zum Summenzeichen steht $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$ für $a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$.

(d) Gegeben seien n Orte, von denen je zwei durch genau eine Straße verbunden sind. Insgesamt gibt es dann $\frac{n(n-1)}{2}$ Straßen.

(e) $19^n - 8^n$ ist durch 11 teilbar.

(f) **Bonusaufgabe:** (3 Punkte)
Zeige allgemein: Seien b, a ganze Zahlen mit $b \neq a$, dann gilt $b^n - a^n$ ist durch $b - a$ teilbar.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

„Wählt man aus der Menge der Menschen irgendeine Gruppe von n Personen aus, so haben diese alle die gleiche Augenfarbe!"
Der „Beweis" wird durch Induktion nach n geführt. Im Falle $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Nun sei die Aussage für n wahr. Für $n + 1$ folgt die Induktion dann so: Wählt man $n + 1$ Personen $x_1, \ldots, x_{n+1}$ aus, so haben nach Induktionsvoraussetzung $x_1, x_2 \ldots, x_n$ die gleiche Augenfarbe, aber auch $x_2, x_3 \ldots, x_n, x_{n+1}$, und damit hat x_{n+1} die gleiche Augenfarbe wie x_n und somit $x_1, \ldots, x_n$.
Wo steckt der Fehler?

Wichtige Hinweise:

- aktive Teilnahme an Vorlesung und Übung
- Die Übungsblätter bitte gut leserlich mit Vor- und Zuname versehen und mehrere Blätter tackern.
- Abgabe der Übungsblätter ist dienstags vor der Übung um 12 Uhr. Später abgegebene Blätter können nicht korrigiert werden.
- Anmeldung für die Veranstaltung "Grundlagen der Mathematikïn Moodle mit den KIZ-Zugangsdaten. Die Anmeldung ist für das Erhalten von Übungspunkten notwendig. (Wintersemester 2015-2016 → Fakultät für Mathematik und Wirtschaftswissenschaften → Mathematik & Wirtschaftsmathematik → Grundlagen der Mathematik)

In der Mathematik ist die Kunst des Fragen Stellens wichtiger, als die des Lösens.
Georg Cantor (1845 - 1918)