Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 02.11.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 22

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 2

5. Betrachten Sie die Ebene (2)

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Berechnen Sie einen Vektor $n \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf E steht und Länge 1 hat.

6. Wir sagen, zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sind parallel zueinander, falls es $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $a = \lambda b$. (5)
Seien nun $u, v \in \mathbb{R}^n$, wobei wir $v \neq 0$ annehmen. Beweisen Sie, dass man u in eine zu v parallele und auf v senkrecht stehende Komponente zerlegen kann. Genauer: Es gibt Vektoren $p, q \in \mathbb{R}^n$, wobei p parallel zu v ist, q senkrecht auf v steht und $u = p + q$.
Hinweis: Eine Skizze ist hilfreich.

7. Sei $(H, \circ)$ eine Gruppe und $a \in H$ fest. Wir definieren nun $(G, \circ)$ durch (3)

$$G = \{g \in H : \exists k \in \mathbb{Z} : g = a^k\}.$$

Für $g \in H$ setzen wir hierbei $g^0 = e$, $g^k = g \circ g \cdots \circ g$ (k-mal), falls $k \in \mathbb{N}$ und $g^k = \left(g^{-1}\right)^{-k}$, falls $-k \in \mathbb{N}$.
Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine abelsche Gruppe ist.

8. Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen mit der jeweiligen Verknüpfung Gruppen sind. Sind diese abelsch? (3+3)

(i) $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$, wobei $a \circ b := a + b + ab$ für $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(ii) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{R}, *)$, wobei

$$\begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + n \\ x + 2^m y \end{pmatrix}, \qquad \text{für } \begin{pmatrix} m \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}.$$

9. Wie bekannt, ist das Kreuzprodukt zwischen zwei Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^3$ definiert durch (6)

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Eigenschaften des Kreuzproduktes für Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$:

(i) Assoziativität: Es gilt $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

(ii) Falls $a \times b = 0$, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

(iii) Kommutativität: Es gilt $a \times b = b \times a$.

(iv) Distributivität: $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

(v) Es gibt einen Vektor $e \in \mathbb{R}^3$, so, dass $e \times a = a \times e = a$ für alle $a \in \mathbb{R}^3$.

(vi) Für alle $a \in \mathbb{R}^3$ existiert ein Vektor $a' \in \mathbb{R}^3$ mit $a \times a' = e$, mit dem Vektor e aus Aufgabenteil (v).