Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 16.11.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 20

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 4

15. (2+2)

(i) Sei M eine Menge, K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Sei $\mathcal{F}(M,V)$ die Menge aller Funktionen von M nach V. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{F}(M,V),+,\cdot)$ mit

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x)+g(x), && f,g \in \mathcal{F}(M,V), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda f(x), && f \in \mathcal{F}(M,V),\ \lambda \in K, \end{aligned}$$

ein Vektorraum über K ist.

(ii) Sei $V=(0,\infty)$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $u,v \in V$ definieren wir

$$u+v := uv, \qquad \lambda \cdot u = u^\lambda.$$

Zeigen Sie, dass $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

16. Falls nicht näher definiert sei in dieser Aufgabe V stets ein Vektorraum über einem Körper K und $m \in \mathbb{N}$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen: (1+1+2)

(i) Seien $x_1,...,x_m \in V$. Es gelte $x_i = x_j$ für jeweils ein $i,j \in \{1,...,m\}$, $i \neq j$. Dann sind $x_1,...,x_m$ linear abhängig.

(ii) Sind $x_1,x_2,x_3 \in V$ paarweise linear unabhängig (d.h. je zwei verschiedene Vektoren von x_1,x_2,x_3 sind linear unabhängig), so sind x_1,x_2,x_3 linear unabhängig.

(iii) Stehen $x_1,\dots,x_m \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ paarweise senkrecht aufeinander, so sind $x_1,\dots,x_m$ linear unabhängig.

17. (2+2+2)

(i) Sei M eine Menge mit mindestens zwei Elementen und K ein Körper. Zeigen Sie: Zwei Vektoren $f,g \in \mathcal{F}(M,K)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn es zwei Elemente $x_1,x_2 \in M$ gibt, sodass $\begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \end{pmatrix}$ linear unabhängige Elemente des K^2 sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die Vektoren $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt{x^2+1}$, $h(x)=|x|$ und $k(x)=x^3$ linear unabhängig in $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sind.

(iii) Sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^5$?

18. Sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K. Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ seien $x_1,\dots,x_m \in V$. (3+3)

(i) Setze $y_i := \sum_{j=1}^i x_j$, $i=1,\dots,m$. Zeigen Sie: $x_1,\dots,x_m$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $y_1,\dots,y_m$ linear unabhängig sind.

(ii) Seien $\alpha,\beta \in \{1,\dots,m\}$. Zeigen Sie: Die Vektoren $x_1-x_\alpha,\dots,x_{\alpha-1}-x_\alpha,x_{\alpha+1}-x_\alpha,\dots,x_m-x_\alpha$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $x_1-x_\beta,\dots,x_{\beta-1}-x_\beta,x_{\beta+1}-x_\beta,\dots,x_m-x_\beta$ linear unabhängig sind.