Universität Ulm

Abgabe: Mittwoch, 23.11.2016

Dr. Gerhard Baur
Jochen Glück
Attila Klimmek
Wintersemester 2016/17
Punktzahl: 24

Übungen Lineare Algebra 1: Blatt 5

19. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K. (2+2)

(a) Seien $v_1, ..., v_n \in V$. Zeigen Sie: Die Vektoren $v_1, ..., v_n$ bilden genau dann eine Basis von V, wenn sie linear unabhängig sind und $\mathcal{LH}(\{v_1, ..., v_n\}) = V$ gilt.

(b) Sei $\emptyset \neq E, F \subseteq V$. Zeigen Sie: Es gilt genau dann $\mathcal{LH}(E) = \mathcal{LH}(E \cup F)$, wenn $F \subseteq \mathcal{LH}(E)$ ist.

20. Wir betrachten die Vektoren (3)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^4$ und setzen $W := \mathcal{LH}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. Zeigen Sie, dass v_1, v_2, v_3 eine Basis von W bilden und bestimmen Sie $\dim W$.

21. Sei V ein Vektorraum über einen Körper K und sei $\emptyset \neq E \subseteq V$. Wir setzen (6)

$$\mathcal{U} := \{U \subseteq V : \ U \text{ ist ein Untervektorraum von } V \text{ und } U \supseteq E\}$$

Sei $W \subseteq V$ eine beliebige Menge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $W = \mathcal{LH}(E)$.

(ii) $W = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U$

(iii) W ist ein Untervektorraum von V, der E enthält, und jeder weitere Untervektorraum von V, der E enthält, ist eine Obermenge von W.

22. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Sie heißt *ungerade*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Es bezeichne $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller geraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller ungeraden Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. (2+2)

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ Untervektorräume von $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die direkte Summe von $\mathcal{F}_{\text{ger}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{F}_{\text{ung}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

23. Sei V der Vektorraum über $\mathbb{R}$, den Sie in Aufgabe 15(ii) auf Blatt 4 betrachtet haben. Bestimmen Sie die Dimension von V. (2)

24. Sie V ein Vektorraum über einen Körper K. Zeigen oder widerlegen Sie: (5)

(a) Für alle Untervektorräume $U, W \subseteq V$ ist $U \cup W$ ebenfalls ein Untervektorraum von V.

(b) Für alle Untervektorräume $U, W \subseteq V$ gilt $\mathcal{LH}(U \cup W) = U + W$.

(c) Für jede Teilmenge $\emptyset \neq E \subseteq V$ gilt: E ist genau dann ein Untervektorraum von V, wenn $\mathcal{LH}(E) = E$ ist.

(d) Wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Untervektorraum U_n von V gegeben ist und wenn $U_n \subseteq U_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist auch $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ ein Untervektorraum von V.

(e) Wenn U_1, U_2 Untervektorräume von V sind und $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ gilt, so ist die Summe $U_1 + U_2$ direkt.